Capitolul 1

Noţiuni Generale

1.1 Definiţii

Forţa este acţiunea asupra unui corp care produce acceleraţia acestuia cu condiţia ca asupra corpului să nu acţioneze şi alte forţe de sens contrar primeia. Forţa este un *vector*.

Timpul este o măsură a succesiunii unor evenimente. În mecanica newtoniană este o cantitate absolută. În mecanica relativistă timpul este relativ faţă de sistemul de referinţă în care se observă succesiunea de evenimente. Unitatea de măsură este secunda.

Masa este o măsură cantitativă a *inerţiei*.

Acceleraţia gravitaţională Orice obiect care cade în vid într-o anumită locaţie de pe suprafaţa Pământului va avea aceeaşi acceleraţie g. Calcularea cu precizie a acceleraţiei gravitaţionale trebuie să ia în considerare rotaţia Pământului, aplatizarea din zona polilor şi altitudinea faţă de nivelul mării. Valoarea utilizată în mod curent este $g = 9,80665 m/s^2$.

Greutatea este forţa rezultantă de atracţie ce acţionează asupra masei unui corp datorită unui câmp gravitaţional.

Impulsul este produsul dintre masă şi viteza liniară a unui corp. Impulsul este un *vector*.

Momentul cinetic Este produsul dintre momentul de inerţie al unui corp şi viteza unghiulară, ambele măsurate faţă de o axă fixă.

1.2 Sisteme şi unităţi de măsură

În *sistemul absolut* de măsură, unităţile pentru lungime, masă şi timp sunt considerate unităţi fundamentale şi toate celelalte unităţi sunt exprimate în funcţie de acestea (ex. pentru forţă: $1N = 1Kg \cdot m/s^2$).

În *sistemul gravitaţional*, unităţile pentru lungime, forţă şi timp sunt considerate unităţi fundamentale şi toate celelalte unităţi sunt exprimate în funcţie de acestea (ex. pentru masă: $1Kg = 1N \cdot s^2/m$).

În sistemul internaţional SI, unitatea de măsură pentru masă este kilogramul (Kg) şi pentru lungime metrul (m). O forţă de un Newton (N) este forţa care produce unui corp cu masa de $1Kg$ o acceleraţie de $1m/s^2$.

1.3 Legile generale ale mecanicii

Legile lui Newton:

I. Dacă un sistem de forţe în echilibru acţionează asupra unui punct material staţionar, acesta va rămâne staţionar. Dacă un sistem de forţe în echilibru acţionează asupra unui punct material aflat în mişcare, acesta va rămâne în mişcare rectilinie neaccelerată.

II. Dacă un sistem de forţe neechilibrat acţionează asupra unui punct material, acesta va accelera proporţional cu mărimea şi direcţia forţei rezultante a sistemului.

III. Dacă două particule exercită forţe una asupra celeilalte, atunci aceste forţe sunt egale ca mărime, opuse ca direcţie şi coliniare.

Ecuaţia fundamentală a mecanicii:

Relaţia de bază dintre masă, acceleraţie şi forţă este dată de legea a II-a a lui Newton: forţa este egală cu produsul dintre masă şi acceleraţie. Aceasta este o ecuaţie vectorială deoarece direcţia forţei trebuie să coincidă cu direcţia acceleraţiei. Alternativa legii a II-a a lui Newton stipulează că forţa rezultantă este egală cu derivata impulsului în funcţie de timp: $F = d(mv)/dt$.

Legea conservării masei

Masa unui corp rămâne neschimbată (se conservă) în orice condiţii fizice sau chimice la care acesta ar putea fi supus.

Legea conservării energiei

Principiul conservării energiei stipulează că energia mecanică totală a unui sistem rămâne neschimbată dacă sistemul este supus doar unor forţe care depind de poziţie or configuraţie.

Legea conservării impulsului

Impulsul unui sistem de corpuri rămâne neschimbat dacă asupra sistemului nu acţionează nici o forţă exterioară. De asemenea, momentul cinetic al unui sistem de corpuri faţă de o axă rămâne constant dacă nu există nici un moment exterior faţă de această axă.

Legea atracţiei reciproce (Gravitaţia)

Două corpuri se atrag cu o forţă F proporţională cu masele lor (m_1 şi m_2) şi invers proporţională cu pătratul distanţei r dintre ele. Altfel spus, $F = km_1m_2/r^2$, unde k este constanta gravitaţională. Valoarea constantei gravitaţionale este $k = 6,673 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$.

EXEMPLU: Două sfere de oţel cu diametrul de $150mm$ cântăresc $7,8kg$ fiecare la suprafaţa Pământului, forţa de greutate fiind $G = 76,5N$. Aceasta este forţa de atracţie dintre Pământ şi sfera de oţel. Forţa de atracţie reciprocă dintre cele două sfere dacă acestea se află în poziţia în care se ating este $F = 0,00000018N = 1,8 \times 10^{-7}N$.

1.4 Diviziunile mecanicii

Potrivit unei împărţiri clasice, mecanica se compune din următoarele trei părţi: *staica*, *cinematica* şi *dinamica*.

În *statică* se face abstracţie de mişcare şi se studiază forţele care acţionează asupra unui corp sau asupra unui sistem de corpuri, determinându-se clasa sistemelor de forţe echivalente. În particular, statica se ocupă cu subclasa sistemelor de forţe care îşi fac echilibru.

Cinematica studiază mişcarea corpurilor, făcând abstracţie de forţele care acţionează asupra lor.

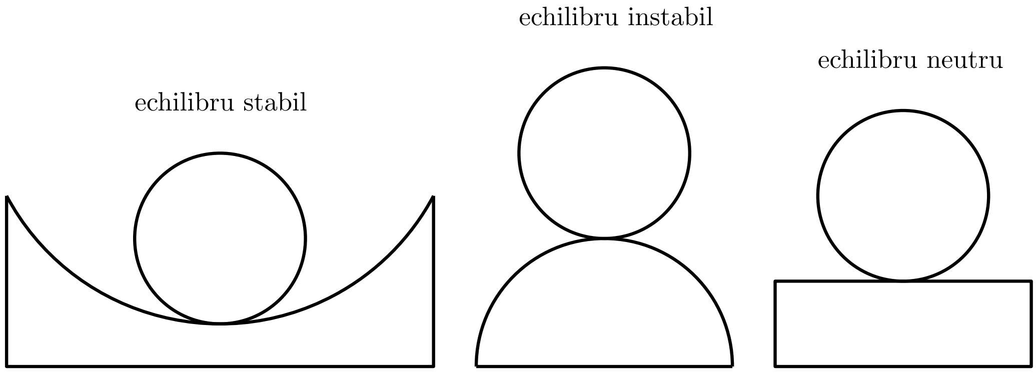
Dinamica studiază mişcarea corpurilor sub acţiunea forţelor care acţionează asupra lor.

Capitolul 2

Statica Rigidului

2.1 Consideraţii generale

Dacă forţele care acţionează asupra unui corp rigid nu produc nici o acceleraţie, atunci ele se neutralizează, adică formează un *sistem de forţe în echilibru*. Echilibrul forţelor este *stabil* dacă, în urma unei deplasări foarte mici din poziţia de echilibru, corpul sub acţiunea forţelor revine în poziţia iniţială. Echilibrul este *instabil* atunci când corpul tinde să se îndepărteze de poziţia de echilibru atunci când este supus unei deplasări foarte mici faţă de poziţia iniţială. Echilibrul este *neutru* dacă forţele îşi menţin echilibrul şi după deplasarea corpului din poziţia iniţială.



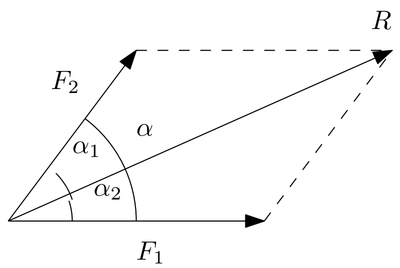
2.2 Forţe externe şi interne

Forţele prin care particulele individuale ale unui corp acţionează una asupra alteia se numesc forţe interne. Toate celelalte forţe se numesc forţe externe. Dacă un corp se sprijină pe alte corpuri şi estesupus unor forţe exterioare, în punctele de sprijin se produc deformaţii şi forţe interne, iar acestea sunt distribuite în interiorul corpului astfel încât să existe un achilibru, iar corpul se consideră a fi în una sau mai multe din următoarele stări: tensiune, compresiune sau forfecare. Forţele exercitate de corp asupra corpurilor pe care se sprijină se numesc *reacţiuni*.

Dacă un corp este în repaus, forţele externe care acţionează asupra sa formează un sistem de forţe în echilibru.

2.3 Compunerea, descompunerea şi echilibrul forţelor

Rezultanta mai multor forţe cu acelaşi punct de aplicaţie (forţe concurente) este o forţă ce va produce acelaşi efect ca forţele individuale acţionând împreună. Rezultanta R a două forţe F_1 şi F_2 aplicate unui corp rigid în acelaşi punct este egală în magnitudine şi direcţie cu diagonala paralelogramului format de forţele F_1 şi F_2.



$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha} \quad \sin\alpha_1 = \frac{F_2\sin\alpha}{R} \quad \sin\alpha_2 = \frac{F_1\sin\alpha}{R}$$

O forţă R poate fi *descompusă* în două forţe componente ce se intersectează în acelaşi punct cu R şi care acţionează în acelaşi plan ca R prin inversarea procesului de calcul a rezultantei. Prin repetarea acestei operaţiuni, forţa R poate fi descompusă într-un număr oricât de mare de forţe componente cu acelaşi punct de aplicaţie şi acţionând în acelaşi plan.

Rezultanta unui sistem de forţe concurente aplicate unui corp rigid se află prin descompunerea fiecărei forţe F în componente pe trei axe de coordonate ortogonale. Dacă α, β şi γ sunt unghiurile faţă de axele Ox, Oy, Oz ale unei forţe F, componentele sale vor fi: $F\cos\alpha$ de-a lungul axei Ox, $F\cos\beta$ de-a lungul axei Oy şi $F\cos\gamma$ de-a lungul axei Oz.

Rezultanta va fi:

$$R = \sqrt{\left(\sum X\right)^2 + \left(\sum Y\right)^2 + \left(\sum Z\right)^2}$$

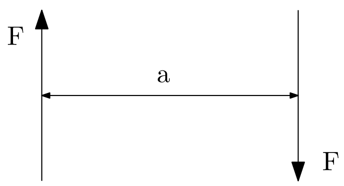
Unghiurile rezultantei faţă de cele trei axe sunt date de:

$$\cos\alpha_r = \sum X/R \quad \cos\beta_r = \sum Y/R \quad \cos\gamma_r = \sum Z/R$$

Condiţia de echilibru static este $R = 0$ adică $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$; $\sum Z = 0$.

2.4 Cupluri de forţe şi momente

Cuplul de forţe Două forţe paralele, necoliniare, egale şi acţionând în direcţii opuse formează un cuplu de forţe.



Un cuplu de forţe nu poate fi redus la o singurp forţă. Momentul unui cuplu este acelaşi în orice punct din spaţiu.

Momentul unui cuplu de forţe este produsul dintre modulul uneia dintre forţe şi distanţa dintre dreptele de-a lungul cărora acţionează cele două forţe.

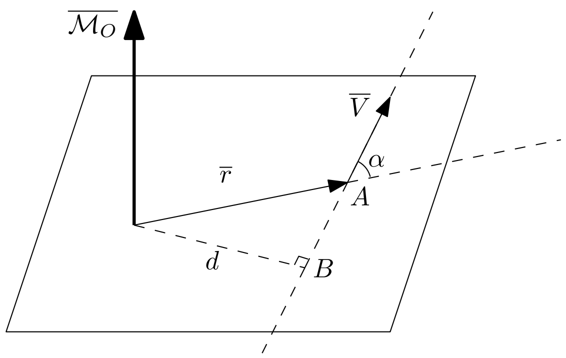
$$M = F \cdot a$$

Unitatea de măsură în sistem internaţional este $[N \cdot m]$. Sensul momentului este considerat pozitiv dacă cuplul de forţe tinde să producă o rotaţie în sens trigonometric. Magnitudinea, direcţia şi sensul momentului unui cuplu de forţe sunt reprezentate printr-un vector, perpendicular pe planul în care acţionează forţa sau forţele care-l produc, cu sensul dictat de regula mâinii drepte sau a şurubului drept (dacă forţa acţionează în plan orizontal şi tinde să producă o rotaţie în sens trigonometric, atunci direcţia vectorului este orientată în sus).

Momentul unui vector faţă de un punct

Momentul unui vector $\overline{V}$ în raport cu un punct O este produsul vectorial dintre vectorul de poziţie $\overline{r}$ al punctului de aplicaţie A al vectorului şi vectorul $\overline{V}$, adică:

$$\boxed{\overline{\mathcal{M}_O} = \overline{r} \times \overline{V}}$$



Rezultă că momentul unui vector în raport cu un punct este un vector a cărui direcţie este perpendiculară pe planul P determinat de punct şi de suportul vectorului, al cărui sens este acela al şurubului drept şi al cărui modul este egal cu produsul $|\overline{r}| \cdot |\overline{V}| \sin\alpha$. Dar $|\overline{r}| \sin\alpha = d$ rezultă:

$$\boxed{|\overline{\mathcal{M}_O}| = |\overline{V}| \cdot d}$$

Momentele se pot compune prin însumarea vectorilor după regula paralelogramului, similar compunerii forţelor.

2.5 Forţele de reacţiune pentru sprijinul corpurilor

Forţele externe, aflate în echilibru, ce acţionează asupra unui corp pot fi *static determinate* sau *static nedeterminate*, în funcţie de numărul de forţe necunoscute.

Primul pas în rezolvarea problemelor de statică este determinarea tuturor forţelor de reacţiune. Pentru cunoaşterea completă a forţelor de reacţiune sunt necesare următoarele date: magnitudinea, direcţia şi punctul de aplicaţie. În funcţie de natura problemei, se pot cunoaşte niciuna, una sau două dintre aceste date.

Un sistem se consideră a fi static determinat atunci când condiţiile de echilibru static sunt suficiente pentru determinarea reacţiunilor.

Capitolul 3

Caracteristici masice şi geometrice ale corpurilor

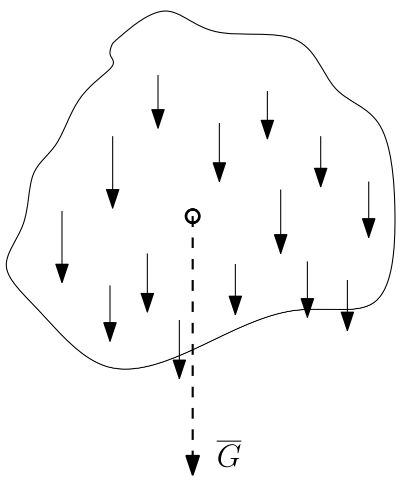
3.1 Centrul de greutate

Forţele care reprezintă greutăţile punctelor materiale ale unui corp rigid se pot considera paralele, iar centrul acestor forţe se numeşte centrul de masă sau centrul de greutate al corpului.

Coordonatele centrului de greutate sunt:

$$x_c = \frac{\sum G_i x_i}{\sum G_i} \quad y_c = \frac{\sum G_i y_i}{\sum G_i} \quad z_c = \frac{\sum G_i z_i}{\sum G_i}$$

unde $\overline{G}$ reprezintă greutatea sistemului de puncte materiale, iar C centrul de greutate al sistemului.



Deoarece $\overline{G}_i = m_i \overline{g}$ rezultă că vectorul de poziţie al centrului de greutate $\overline{r}_c$ poate fi scris sub forma:

$$\overline{r}_c = \frac{\sum m_i \overline{r}_i}{\sum m_i} \quad \rightarrow \quad x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i};$$

Sau în formă continuă:

$$\overline{r}_c = \frac{\int \overline{r}\, dm}{\int dm} \quad \rightarrow \quad x_c = \frac{\int x\, dm}{\int dm}; \quad \ldots$$

3.1.1 Centrul de greutate al unor linii

Linii drepte (segmente rectilinii):	mijlocul segmentului
Arc de cerc de rază R cu unghiul la centru 2α:	$x_c = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ (fig.3.1)
sau pentru exemplul din figura 3.2:	$x_c = R\frac{\sin\beta}{\beta}$ $y_c = 2R\frac{\sin^2\beta/2}{\beta}$

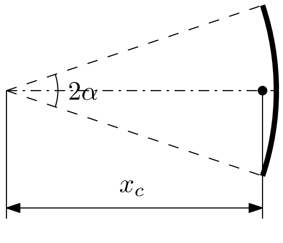


Figura 3.1:

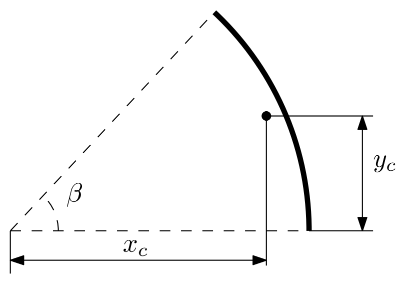


Figura 3.2:

3.1.2 Centrul de greutate al unor suprafeţe

Triunghi oarecare:	intersecţia medianelor
Paralelogram:	intersecţia diagonalelor
Sector de cerc de rază R cu unghiul la centru 2α (fig.3.3) :	$x_c = \frac{2}{3}R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$
Segment de cerc de rază R cu unghiul la centru 2α (fig.3.4) :	$x_c = \frac{2}{3}R\,\frac{\sin^3\alpha}{\alpha-\sin\alpha\cos\beta}$
Suprafaţa unui sfert de elipsă (fig.3.5) :	$x_c = \frac{4a}{3\pi}$ $y_c = \frac{4b}{3\pi}$
Jumătatea unui segment parabolic (fig.3.6) :	$x_c = \frac{3}{5a}$ $y_c = \frac{3}{8b}$

3.1.3 Centrul de greutate al unor solide

Paralelipiped:	intersecţia diagonalelor
Prisma şi cilindrul:	mijlocul segmentului care leagă centrele de greutate ale suprafeţelor bazelor
Piramida şi conul:	la o pătrime de bază pe segmentul ce uneşte centrul de greutate al bazei cu vârful
Sector sferic de rază R şi înălţime H:	$OC = \frac{3}{4}\left(R - \frac{H}{2}\right)$
Segment de sferă de rază R şi înălţime H (fig. 3.7) :	$OC = \frac{3(2R-H)^2}{4(3R-H)}$

3.2 Momente de inerţie

Momentul de inerţie al unui corp în raport cu o axă este suma produselor dintre masele particulelor elementare ale corpului şi pătratul distanţei lor faţă de axă.

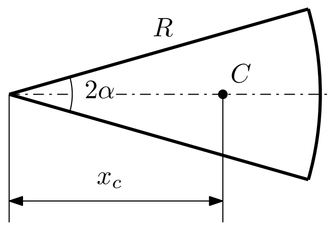


Figura 3.3:

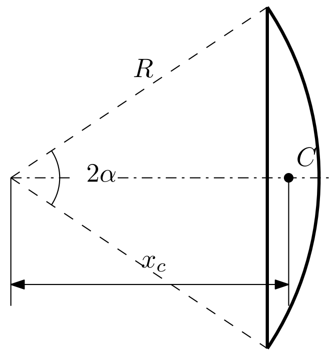


Figura 3.4:

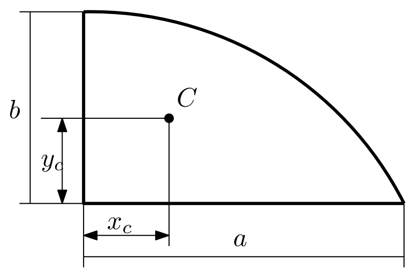


Figura 3.5:

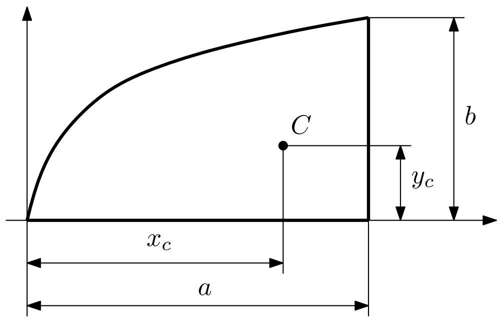


Figura 3.6:

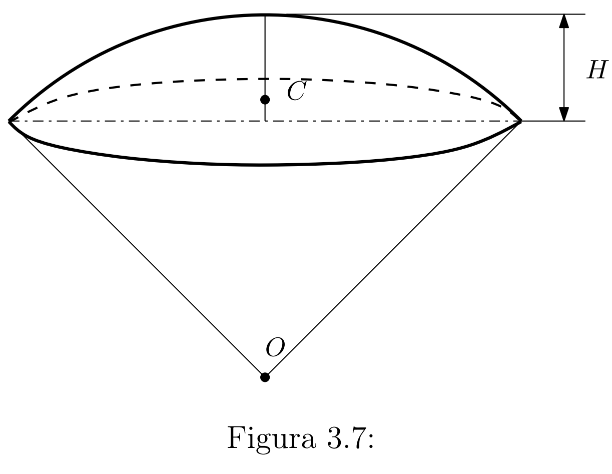


Figura 3.7:

$$I = \sum m_i y_i^2 \quad \text{sau} \quad I = \int y^2 dm$$

Dacă $I = k^2 m$, parametrul k se numeşte *rază de inerţie.*

Momentul de inerţie al unei suprafeţe faţă de o axă este suma produselor dintre suprafeţele elementare în care se poate diviza suprafaţa şi pătratul distanţei lor faţă de axă.

$$I = \int y^2 dA = k^2 A$$

Momentul de inerţie al unei suprafeţe sau unui corp faţă de o axă este egal cu momentul de inerţie faţă de o axă paralelă ce trece prin centrul de greutate plus pătratul distanţei dintre cele două axe înmulţit cu aria suprafeţei, respectiv cu masa corpului.

Ex:

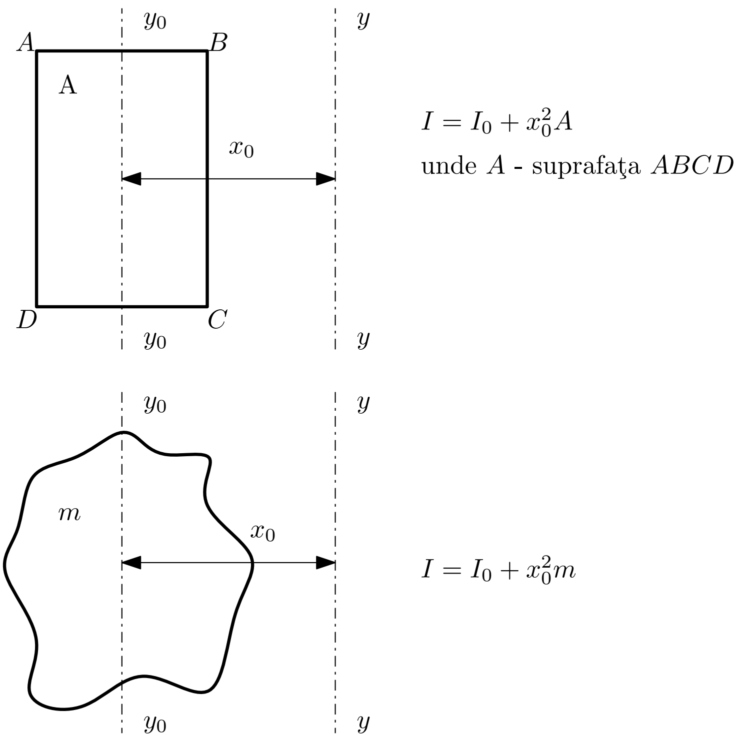


Figura 3.8:

Momentul de inerţie polar al unei suprafeţe se consideră faţă de o axă perpendiculară pe planul suprafeţei. Se consideră o suprafaţă plană A situată în planul xOy. Dacă I_x şi I_y sunt momentele de inerţie ale suprafeţei A faţă de xx şi yy, atunci momentul polar de inerţie este egal cu suma momentelor de inerţie faţă de cele două axe.

$$I_p = I_x + I_y$$