

# Elemente de Mecanică și Inginerie Mecanică

Tiberiu Laurian

25 februarie 2008



# Cuprins

<b>I</b>	<b>Elemente de mecanică</b>	<b>7</b>
<b>1</b>	<b>Noțiuni Generale</b>	<b>9</b>
1.1	Definiții . . . . .	9
1.2	Sisteme și unități de măsură . . . . .	10
1.3	Legile generale ale mecanicii . . . . .	10
1.4	Diviziunile mecanicii . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Statica Rigidului</b>	<b>13</b>
2.1	Considerații generale . . . . .	13
2.2	Forțe externe și interne . . . . .	13
2.3	Compunerea, descompunerea și echilibrul forțelor . . . . .	14
2.4	Cupluri de forțe și momente . . . . .	15
2.5	Forțele de reacțiune pentru sprijinul corpurilor . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Caracteristici masice și geometrice</b>	<b>17</b>
3.1	Centrul de greutate . . . . .	17
3.1.1	Centrul de greutate al unor linii . . . . .	18
3.1.2	Centrul de greutate al unor suprafețe . . . . .	19
3.1.3	Centrul de greutate al unor solide . . . . .	19
3.2	Momente de inerție . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Cinematica</b>	<b>23</b>
4.1	Traietoria mișcării, viteza și accelerația . . . . .	23
4.2	Componentele vitezei și accelerației . . . . .	24
4.3	Mișcări particulare ale punctului . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Dinamica</b>	<b>29</b>
5.1	Introducere . . . . .	29
5.2	Formularea problemelor generale ale dinamicii punctului material liber . . . . .	29
5.3	Mișcarea unui punct material sub acțiunea gravitației . . . . .	31

5.4	Noțiuni de bază energetice . . . . .	33
<b>II</b>	<b>Rezistența materialelor</b>	<b>35</b>
<b>6</b>	<b>Generalități</b>	<b>37</b>
6.1	Obiectul și problemele rezistenței materialelor . . . . .	37
6.2	Eforturi unitare . . . . .	38
6.3	Deformații și deplasări . . . . .	39
6.4	Legea lui Hooke . . . . .	40
<b>7</b>	<b>Solicitări simple în bare</b>	<b>43</b>
7.1	Întinderea și compresiunea . . . . .	43
7.2	Forfecarea . . . . .	44
7.3	Încovoierea . . . . .	45
7.4	Răsucirea . . . . .	48
<b>8</b>	<b>Solicitări compuse</b>	<b>53</b>
8.1	Introducere . . . . .	53
8.2	Întinderea sau compresiunea excentrică . . . . .	53
8.3	Încovoiere cu răsucire . . . . .	56
8.4	Răsucire cu forfecare . . . . .	57
<b>9</b>	<b>Solicitări variabile</b>	<b>59</b>
9.1	Noțiuni generale . . . . .	59
9.2	Curbele Wöhler . . . . .	61
9.3	Factori de influență a rezistenței la oboseală . . . . .	63
9.3.1	Factori constructivi . . . . .	63
9.3.2	Factori tehnologici . . . . .	64
9.3.3	Influența condițiilor de lucru . . . . .	64
9.4	Calculul coeficientului de siguranță . . . . .	64
9.4.1	Calculul coeficientului de siguranță pentru cicluri al- ternant simetrice . . . . .	65
9.4.2	Calculul coeficientului de siguranță pentru cicluri asi- metrice . . . . .	65
9.4.3	Calculul coeficientului de siguranță la solicitări com- puse pentru cicluri simetrice . . . . .	66
<b>III</b>	<b>Organe de mașini</b>	<b>67</b>
<b>10</b>	<b>Îmbinări sudate</b>	<b>69</b>

10.1	Noțiuni generale . . . . .	69
10.2	Calculul îmbinărilor sudate . . . . .	73
10.2.1	Calculul sudurilor cap la cap . . . . .	73
10.2.2	Calculul sudurilor de colț . . . . .	74
<b>11</b>	<b>Asamblări demontabile</b>	<b>81</b>
11.1	Asamblări filetate . . . . .	81
11.1.1	Materiale utilizate pentru fabricarea șuruburilor . . . . .	82
11.1.2	Calculul asamblărilor filetate . . . . .	83
11.1.3	Determinarea înălțimii piuliței . . . . .	87
11.1.4	Frecarea și condiția de autofrânare . . . . .	88
11.1.5	Randamentul șurubului . . . . .	90
11.2	Asamblări arbore-butuc . . . . .	90
11.2.1	Asamblarea cu pană paralelă . . . . .	90
11.2.2	Asamblarea cu caneluri . . . . .	91
<b>12</b>	<b>Osii și arbori</b>	<b>95</b>
12.1	Caracterizare. Rol funcțional . . . . .	95
12.2	Materiale și tehnologie . . . . .	96
12.3	Calculul arborilor drepți . . . . .	96
12.3.1	Calculul de predimensionare . . . . .	96
12.3.2	Proiectarea formei . . . . .	97
12.3.3	Verificarea arborilor la oboseală . . . . .	97
12.3.4	Verificarea arborilor la solicitări statice compuse . . . . .	98



Partea I  
Elemente de mecanică





# Capitolul 1

## Noțiuni Generale

### 1.1 Definiții

**Forța** este acțiunea asupra unui corp care produce accelerația acestuia cu condiția ca asupra corpului să nu acționeze și alte forțe de sens contrar primeia. Forța este un *vector*.

**Timpul** este o măsură a succesiunii unor evenimente. În mecanica newtoniană este o cantitate absolută. În mecanica relativistă timpul este relativ față de sistemul de referință în care se observă succesiunea de evenimente. Unitatea de măsură este secunda.

**Masa** este o măsură cantitativă a *inerției*.

**Accelerația gravitațională** Orice obiect care cade în vid într-o anumită locație de pe suprafața Pământului va avea aceeași accelerație  $g$ . Calcularea cu precizie a accelerației gravitaționale trebuie să ia în considerare rotația Pământului, aplatizarea din zona polilor și altitudinea față de nivelul mării. Valoarea utilizată în mod curent este  $g = 9,80665m/s^2$ .

**Greutatea** este forța rezultantă de atracție ce acționează asupra masei unui corp datorită unui câmp gravitațional.

**Impulsul** este produsul dintre masă și viteza liniară a unui corp. Impulsul este un *vector*.

**Momentul cinetic** Este produsul dintre momentul de inerție al unui corp și viteza unghiulară, ambele măsurate față de o axă fixă.

## 1.2 Sisteme și unități de măsură

În *sistemul absolut* de măsură, unitățile pentru lungime, masă și timp sunt considerate unități fundamentale și toate celelalte unități sunt exprimate în funcție de acestea (ex. pentru forță:  $1N = 1Kg \cdot m/s^2$ ).

În *sistemul gravitațional*, unitățile pentru lungime, forță și timp sunt considerate unități fundamentale și toate celelalte unități sunt exprimate în funcție de acestea (ex. pentru masă:  $1Kg = 1N \cdot s^2/m$ ).

În sistemul internațional SI, unitatea de măsură pentru masă este kilogramul (Kg) și pentru lungime metrul (m). O forță de un Newton (N) este forța care produce unui corp cu masa de  $1Kg$  o accelerație de  $1m/s^2$ .

## 1.3 Legile generale ale mecanicii

### Legile lui Newton:

- I. Dacă un sistem de forțe în echilibru acționează asupra unui punct material staționar, acesta va rămâne staționar. Dacă un sistem de forțe în echilibru acționează asupra unui punct material aflat în mișcare, acesta va rămâne în mișcare rectilinie neaccelerată.
- II. Dacă un sistem de forțe neechilibrat acționează asupra unui punct material, acesta va accelera proporțional cu mărimea și direcția forței rezultante a sistemului.
- III. Dacă două particule exercită forțe una asupra celeilalte, atunci aceste forțe sunt egale ca mărime, opuse ca direcție și coliniare.

### Ecuția fundamentală a mecanicii:

Relația de bază dintre masă, accelerație și forță este dată de legea a II-a a lui Newton: forța este egală cu produsul dintre masă și accelerație. Aceasta este o ecuație vectorială deoarece direcția forței trebuie să coincidă cu direcția accelerației. Alternativa legii a II-a a lui Newton stipulează că forța rezultantă este egală cu derivata impulsului în funcție de timp:  $F = d(mv)/dt$ .

### Legea conservării masei

Masa unui corp rămâne neschimbată (se conservă) în orice condiții fizice sau chimice la care acesta ar putea fi supus.

## Legea conservării energiei

Principiul conservării energiei stipulează că energia mecanică totală a unui sistem rămâne neschimbată dacă sistemul este supus doar unor forțe care depind de poziție or configurație.

## Legea conservării impulsului

Impulsul unui sistem de corpuri rămâne neschimbat dacă asupra sistemului nu acționează nici o forță exterioară. De asemenea, momentul cinetic al unui sistem de corpuri față de o axă rămâne constant dacă nu există nici un moment exterior față de această axă.

## Legea atracției reciproce (Gravitația)

Două corpuri se atrag cu o forță  $F$  proporțională cu masele lor ( $m_1$  și  $m_2$ ) și invers proporțională cu pătratul distanței  $r$  dintre ele. Altfel spus,  $F = km_1m_2/r^2$ , unde  $k$  este constanta gravitațională. Valoarea constantei gravitaționale este  $k = 6,673 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ .

EXEMPLU: Două sfere de oțel cu diametrul de  $150mm$  cântăresc  $7,8kg$  fiecare la suprafața Pământului, forța de greutate fiind  $G = 76,5N$ . Aceasta este forța de atracție dintre Pământ și sfera de oțel. Forța de atracție reciprocă dintre cele două sfere dacă acestea se află în poziția în care se ating este  $F = 0,00000018N = 1,8 \times 10^{-7}N$ .

## 1.4 Diviziunile mecanicii

Potrivit unei împărțiri clasice, mecanica se compune din următoarele trei părți: *statica*, *cinematica* și *dinamica*.

În *statică* se face abstracție de mișcare și se studiază forțele care acționează asupra unui corp sau asupra unui sistem de corpuri, determinându-se clasa sistemelor de forțe echivalente. În particular, *statica* se ocupă cu subclasa sistemelor de forțe care își fac echilibru.

*Cinematica* studiază mișcarea corpurilor, făcând abstracție de forțele care acționează asupra lor.

*Dinamica* studiază mișcarea corpurilor sub acțiunea forțelor care acționează asupra lor.

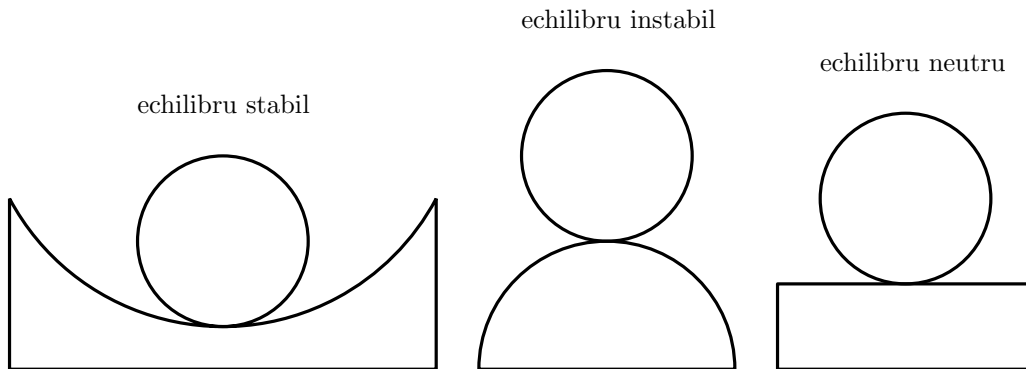


# Capitolul 2

## Statica Rigidului

### 2.1 Considerații generale

Dacă forțele care acționează asupra unui corp rigid nu produc nici o accelerație, atunci ele se neutralizează, adică formează un *sistem de forțe în echilibru*. Echilibrul forțelor este *stabil* dacă, în urma unei deplasări foarte mici din poziția de echilibru, corpul sub acțiunea forțelor revine în poziția inițială. Echilibrul este *instabil* atunci când corpul tinde să se îndepărteze de poziția de echilibru atunci când este supus unei deplasări foarte mici față de poziția inițială. Echilibrul este *neutru* dacă forțele își mențin echilibrul și după deplasarea corpului din poziția inițială.



### 2.2 Forțe externe și interne

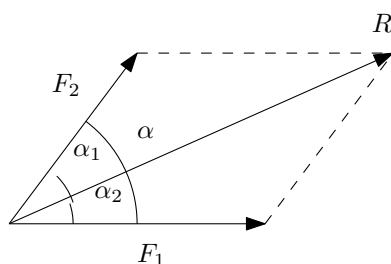
Forțele prin care particulele individuale ale unui corp acționează una asupra alteia se numesc forțe interne. Toate celelalte forțe se numesc forțe externe. Dacă un corp se sprijină pe alte corpuri și este supus unor forțe exterioare, în punctele de sprijin se produc deformații și forțe interne, iar acestea sunt

distribuite în interiorul corpului astfel încât să existe un echilibru, iar corpul se consideră a fi în una sau mai multe din următoarele stări: tensiune, compresiune sau forfecare. Forțele exercitate de corp asupra corpurilor pe care se sprijină se numesc *reacțiuni*.

Dacă un corp este în repaus, forțele externe care acționează asupra sa formează un sistem de forțe în echilibru.

## 2.3 Compunerea, descompunerea și echilibrul forțelor

Rezultanta mai multor forțe cu același punct de aplicație (forțe concurente) este o forță ce va produce același efect ca forțele individuale acționând împreună. Rezultanta  $R$  a două forțe  $F_1$  și  $F_2$  aplicate unui corp rigid în același punct este egală în magnitudine și direcție cu diagonala paralelogramului format de forțele  $F_1$  și  $F_2$ .



$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha} \quad \sin \alpha_1 = \frac{F_2 \sin \alpha}{R} \quad \sin \alpha_2 = \frac{F_1 \sin \alpha}{R}$$

O forță  $R$  poate fi *descompusă* în două forțe componente ce se intersectează în același punct cu  $R$  și care acționează în același plan ca  $R$  prin inversarea procesului de calcul a rezultantei. Prin repetarea acestei operațiuni, forța  $R$  poate fi descompusă într-un număr oricât de mare de forțe componente cu același punct de aplicație și acționând în același plan.

**Rezultanta unui sistem de forțe concurente aplicate unui corp rigid** se află prin descompunerea fiecărei forțe  $F$  în componente pe trei axe de coordonate ortogonale. Dacă  $\alpha$ ,  $\beta$  și  $\gamma$  sunt unghiurile față de axele Ox, Oy, Oz ale unei forțe  $F$ , componentele sale vor fi:  $F \cos \alpha$  de-a lungul axei Ox,  $F \cos \beta$  de-a lungul axei Oy și  $F \cos \gamma$  de-a lungul axei Oz.

Rezultanta va fi:

$$R = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2 + (\sum Z)^2}$$

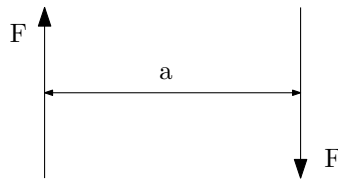
Unghiurile rezultantei față de cele trei axe sunt date de:

$$\cos \alpha_r = \sum X/R \quad \cos \beta_r = \sum Y/R \quad \cos \gamma_r = \sum Z/R$$

Condiția de echilibru static este  $R = 0$  adică  $\sum X = 0$ ;  $\sum Y = 0$ ;  $\sum Z = 0$ .

## 2.4 Cupluri de forțe și momente

**Cuplul de forțe** Două forțe paralele, necoliniare, egale și acționând în direcții opuse formează un cuplu de forțe.



Un cuplu de forțe nu poate fi redus la o singură forță. Momentul unui cuplu este același în orice punct din spațiu.

**Momentul unui cuplu de forțe** este produsul dintre modulul uneia dintre forțe și distanța dintre dreptele de-a lungul cărora acționează cele două forțe.

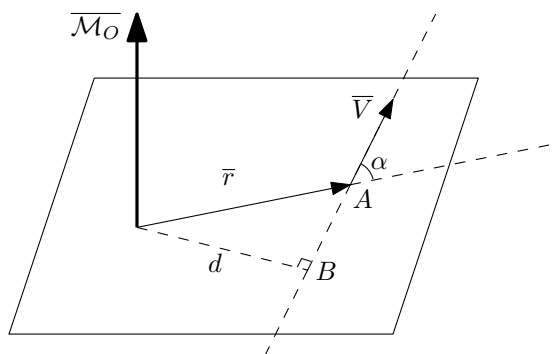
$$M = F \cdot a$$

Unitatea de măsură în sistem internațional este  $[N \cdot m]$ . Sensul momentului este considerat pozitiv dacă cuplul de forțe tinde să producă o rotație în sens trigonometric. Magnitudinea, direcția și sensul momentului unui cuplu de forțe sunt reprezentate printr-un vector, perpendicular pe planul în care acționează forța sau forțele care-l produc, cu sensul dictat de regula mâinii drepte sau a șurubului drept (dacă forța acționează în plan orizontal și tinde să producă o rotație în sens trigonometric, atunci direcția vectorului este orientată în sus).

### Momentul unui vector față de un punct

Momentul unui vector  $\vec{V}$  în raport cu un punct  $O$  este produsul vectorial dintre vectorul de poziție  $\vec{r}$  al punctului de aplicație  $A$  al vectorului și vectorul  $\vec{V}$ , adică:

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{V}}$$



Rezultă că momentul unui vector în raport cu un punct este un vector a cărui direcție este perpendiculară pe planul  $P$  determinat de punct și de suportul vectorului, al cărui sens este acela al șurubului drept și al cărui modul este egal cu produsul  $|\vec{r}| \cdot |\vec{V}| \sin \alpha$ . Dar  $|\vec{r}| \sin \alpha = d$  rezultă:

$$\boxed{|\overline{\mathcal{M}}_O| = |\vec{V}| \cdot d}$$

Momentele se pot compune prin însumarea vectorilor după regula paralelogramului, similar compunerii forțelor.

## 2.5 Forțele de reacțiune pentru sprijinul corpurilor

Forțele externe, aflate în echilibru, ce acționează asupra unui corp pot fi *static determinate* sau *static nedeterminate*, în funcție de numărul de forțe necunoscute.

Primul pas în rezolvarea problemelor de statică este determinarea tuturor forțelor de reacțiune. Pentru cunoașterea completă a forțelor de reacțiune sunt necesare următoarele date: mărimea, direcția și punctul de aplicație. În funcție de natura problemei, se pot cunoaște niciuna, una sau două dintre aceste date.

Un sistem se consideră a fi static determinat atunci când condițiile de echilibru static sunt suficiente pentru determinarea reacțiilor.



# Capitolul 3

## Caracteristici masice și geometrice ale corpurilor

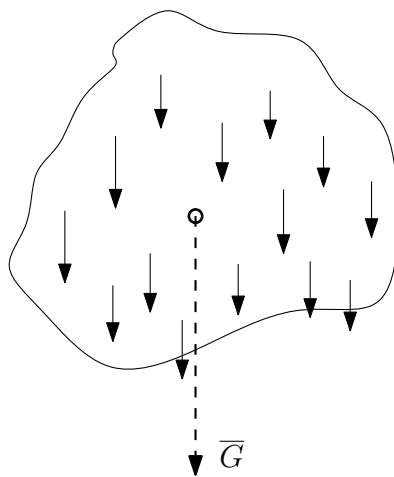
### 3.1 Centrul de greutate

Forțele care reprezintă greutatea punctelor materiale ale unui corp rigid se pot considera paralele, iar centrul acestor forțe se numește centrul de masă sau centrul de greutate al corpului.

Coordonatele centrului de greutate sunt:

$$x_c = \frac{\sum G_i x_i}{\sum G_i} \quad y_c = \frac{\sum G_i y_i}{\sum G_i} \quad z_c = \frac{\sum G_i z_i}{\sum G_i}$$

unde  $\bar{G}$  reprezintă greutatea sistemului de puncte materiale, iar  $C$  centrul de greutate al sistemului.



Deoarece  $\overline{G}_i = m_i \overline{g}$  rezultă că vectorul de poziție al centrului de greutate  $\overline{r}_c$  poate fi scris sub forma:

$$\overline{r}_c = \frac{\sum m_i \overline{r}_i}{\sum m_i} \quad \rightarrow \quad x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i};$$

Sau în formă continuă:

$$\overline{r}_c = \frac{\int \overline{r} dm}{\int dm} \quad \rightarrow \quad x_c = \frac{\int x dm}{\int dm}; \quad \dots$$

### 3.1.1 Centrul de greutate al unor linii

Linii drepte (segmente rectilinii): mijlocul segmentului

Arc de cerc de rază  $R$  cu unghiul la centru  $2\alpha$ :  $x_c = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$  (fig.3.1)

sau pentru exemplul din figura 3.2:  $x_c = R \frac{\sin \beta}{\beta}$   
 $y_c = 2R \frac{\sin^2 \beta/2}{\beta}$

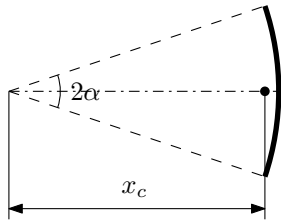


Figura 3.1:

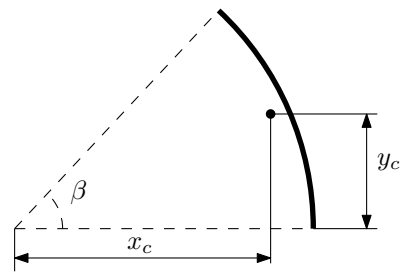


Figura 3.2:

### 3.1.2 Centrul de greutate al unor suprafețe

Triunghi oarecare:	intersecția medianelor
Paralelogram:	intersecția diagonalelor
Sector de cerc de rază $R$ cu unghiul la centru $2\alpha$ (fig.3.3) :	$x_c = \frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$
Segment de cerc de rază $R$ cu unghiul la centru $2\alpha$ (fig.3.4) :	$x_c = \frac{2}{3}R \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \beta}$
Suprafața unui sfert de elipsă (fig.3.5) :	$x_c = \frac{4a}{3\pi}$ $y_c = \frac{4b}{3\pi}$
Jumătatea unui segment parabolic (fig.3.6) :	$x_c = \frac{3}{5a}$ $y_c = \frac{3}{8b}$

### 3.1.3 Centrul de greutate al unor solide

Paralelipiped:	intersecția diagonalelor
Prisma și cilindrul:	mijlocul segmentului care leagă centrele de greutate ale suprafețelor bazelor
Piramida și conul:	la o pătrime de bază pe segmentul ce unește centrul de greutate al bazei cu vârful
Sector sferic de rază $R$ și înălțime $H$ :	$OC = \frac{3}{4} \left( R - \frac{H}{2} \right)$
Segment de sferă de rază $R$ și înălțime $H$ (fig. 3.7) :	$OC = \frac{3(2R-H)^2}{4(3R-H)}$

## 3.2 Momente de inerție

*Momentul de inerție al unui corp* în raport cu o axă este suma produselor dintre masele particulelor elementare ale corpului și pătratul distanței lor față de axă.

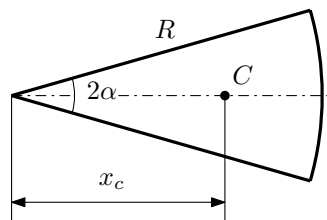


Figura 3.3:

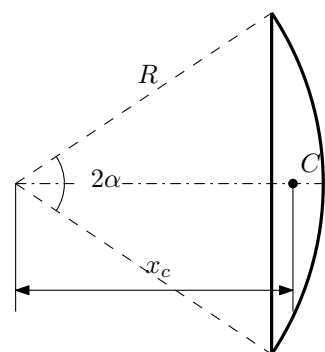


Figura 3.4:

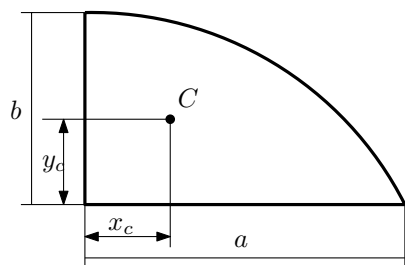


Figura 3.5:

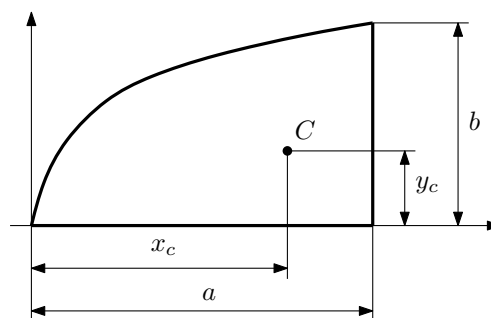


Figura 3.6:

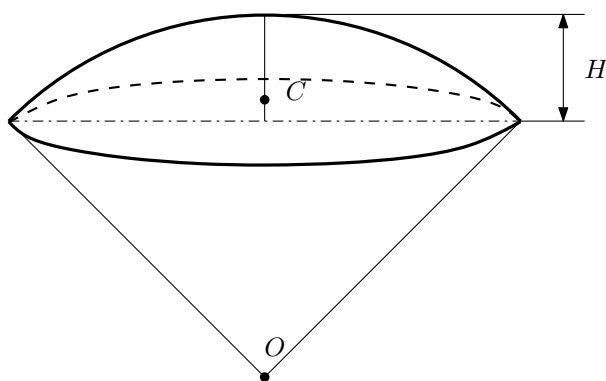


Figura 3.7:

$$I = \sum m_i y_i^2 \quad \text{sau} \quad I = \int y^2 dm$$

Dacă  $I = k^2 m$ , parametrul  $k$  se numește *rază de inerție*.

*Momentul de inerție al unei suprafețe* față de o axă este suma produselor dintre suprafețele elementare în care se poate diviza suprafața și pătratul distanței lor față de axă.

$$I = \int y^2 dA = k^2 A$$

Momentul de inerție al unei suprafețe sau unui corp față de o axă este egal cu momentul de inerție față de o axă paralelă ce trece prin centrul de greutate plus pătratul distanței dintre cele două axe înmulțit cu aria suprafeței, respectiv cu masa corpului.

Ex:

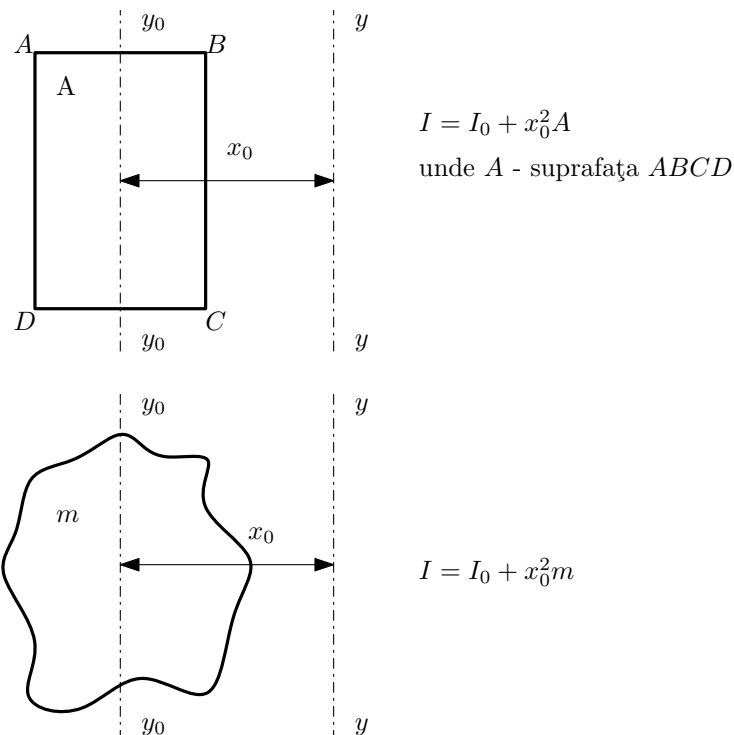


Figura 3.8:

*Momentul de inerție polar* al unei suprafețe se consideră față de o axă perpendiculară pe planul suprafeței. Se consideră o suprafață plană  $A$  situată

în planul  $xOy$ . Dacă  $I_x$  și  $I_y$  sunt momentele de inerție ale suprafeței  $A$  față de  $xx$  și  $yy$ , atunci momentul polar de inerție este egal cu suma momentelor de inerție față de cele două axe.

$$I_p = I_x + I_y$$

# Capitolul 4

## Cinemática

### 4.1 Traectoria mișcării, viteza și accelerația

Cinemática studiază mișcarea corpurilor fără a lua în considerare efectul forțelor și al maselor.

Mișcarea absolută a unui punct material se cunoaște dacă este posibil să se determine în orice moment  $t$  poziția sa față de un reper fix. Poziția punctului față de un sistem de referință ales se poate defini prin raza vectorie  $\vec{r}$  dusă din originea sistemului.

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Această funcție vectorială trebuie să fie continuă, uniformă (punctul nu poate ocupa mai multe poziții simultan), finită în modul și derivabilă. Primele două derivate ale funcției  $\vec{r}(t)$  definesc viteza și accelerația punctului la un moment  $t$ .

$$v = dr/dt; \quad a = dv/dt; \quad adr = vdv$$

sau

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}; \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

În sistemul de referință cartezian, poziția punctului este definită prin coordonatele  $x, y, z$  care sunt egale cu proiecțiile razei vectorie  $\vec{r}$  pe axele corespunzătoare:

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z$$

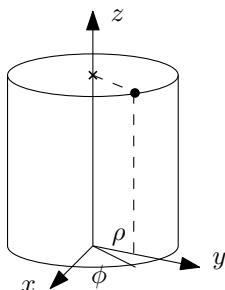
În diverse aplicații este util de folosit coordonate cilindrice sau sferice. Coordonatele cilindrice și sferice sunt legate de cele carteziane prin relațiile următoare:

Coordonate cilindrice

$$x = \rho \cos \phi$$

$$y = \rho \sin \phi$$

$$z = z$$

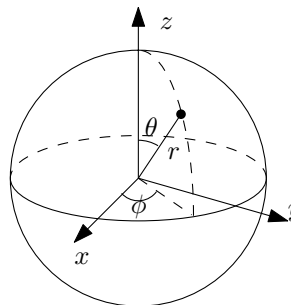


Coordonate sferice

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$



## 4.2 Componentele vitezei și accelerației

Viteza  $\bar{v}$  se determină prin derivarea în raport cu timpul a vectorului de poziție  $\bar{r}$ :

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} + x\dot{\bar{i}} + y\dot{\bar{j}} + z\dot{\bar{k}}$$

Dar versorii axelor  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  sunt vectori constanți (sistemul de coordonate este fix). Rezultă că derivatele lor în raport cu timpul sunt nule. Așadar:

$$\bar{v} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} \Rightarrow v_x = \dot{x}; v_y = \dot{y}; v_z = \dot{z}$$

Accelerația  $\bar{a}$  se determină derivând de două ori vectorul de poziție în raport cu timpul.

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k} \Rightarrow a_x = \ddot{x}; a_y = \ddot{y}; a_z = \ddot{z}$$

**În coordonate polare:**

Mișcarea punctului este definită prin coordonatele  $r$  și  $\theta$  care variază în timp:

$$r = r(t); \theta = \theta(t)$$

Versorii care definesc axele pe care se proiectează vectorii viteză și accelerație sunt  $\bar{\rho}$  și  $\bar{n}$ .

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \cos \theta \bar{i} + \sin \theta \bar{j} \\ \bar{n} &= -\sin \theta \bar{i} + \cos \theta \bar{j} \end{aligned}$$

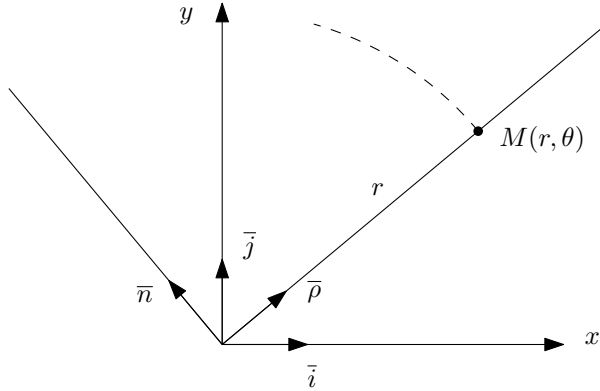


Prin derivare în raport cu timpul se obțin viteza și accelerația:

$$\dot{\bar{\rho}} = \dot{\theta}\bar{n}; \dot{\bar{n}} = -\dot{\theta}\bar{\rho}; \bar{r} = r\bar{\rho}$$

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{r}\bar{\rho} + r\dot{\theta}\bar{n} \Rightarrow v_\rho = \dot{r}; v_n = r\dot{\theta}$$

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{\rho} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\bar{n} \Rightarrow a_\rho = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2; a_n = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$



**În coordonate cilindrice:**

$$v_\rho = \dot{r}; v_n = r\dot{\theta}; v_z = \dot{z}$$

$$a_\rho = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2; a_n = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}; a_z = \ddot{z}$$

**În coordonate sferice:**

$$v_\rho = \dot{r}; v_\mu = r\dot{\theta}; v_n = r \sin \theta \dot{\phi}$$

$$a_\rho = \ddot{r} - \dot{r}\dot{\theta}^2 + r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2$$

$$a_\mu = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2$$

$$a_n = r \sin \theta \ddot{\phi} + 2r \cos \theta \dot{\phi}\dot{\theta} + 2 \sin \theta \dot{\phi}\dot{r}$$

## 4.3 Mișcări particulare ale punctului

*Mișcarea rectilinie uniformă:* Mișcarea unui punct material este rectilinie și uniformă dacă punctul se deplasează pe o linie dreaptă astfel încât scalarul (modulul) vitezei să rămână constant.

Alegând un sistem de referință cartezian, a cărui axă  $Ox$  coincide cu dreapta pe care se face mișcarea, avem:

$$v_x = v_0 = \text{const.}; y = 0; z = 0$$

Ecuția mișcării rectilinii este:

$$\boxed{x = v_0 t + x_0}$$

*Mișcarea rectilinie uniform variată:* Un punct material are o mișcare rectilinie uniform variată dacă se deplasează pe o dreaptă astfel încât modulul accelerației sale rămâne constant.

$$a_x = \text{const.}; y = 0; z = 0$$

$$\ddot{x} = a = \text{const.} \rightarrow \text{integrare} \rightarrow \dot{x} = at + C_1 \rightarrow \text{integrare} \rightarrow x = a \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$$

Constantele  $C_1$  și  $C_2$  se determină din condițiile inițiale:

$$t = 0 \rightarrow x = x_0; \dot{x} = v_0$$

$$x_0 = C_2; v_0 = C_1$$

Așadar:

$$\boxed{x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0}$$

$$\boxed{v = at + v_0}$$

Viteza se poate exprima și în funcție de spațiu:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2a(x - x_0)}$$

*Mișcarea circulară:* Mișcarea unui punct material pe un cerc poate fi studiată cel mai simplu, utilizând coordonatele polare  $(\rho, \theta)$ . Dacă distanța parcursă de punct este  $s = s(t)$ , atunci viteza și accelerațiile sunt:

$$v = \dot{s} = R\dot{\theta} = R\omega$$

$$a_\tau = \ddot{s} = R\ddot{\theta} = R\epsilon$$

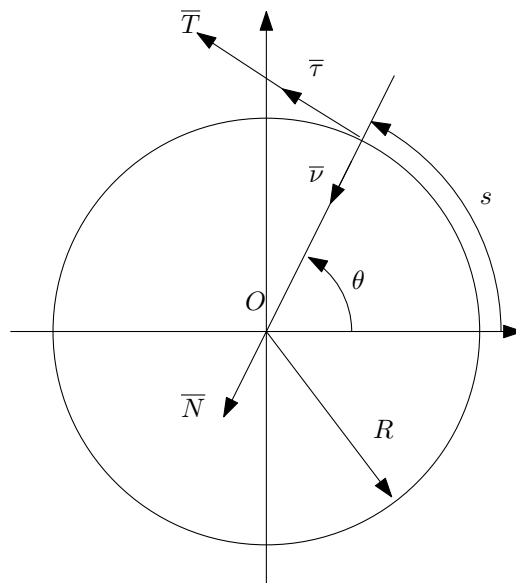
$$a_{nu} = \frac{v^2}{\rho} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2$$

unde  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  este viteza unghiulară și  $\epsilon = \frac{d\omega}{dt}$  accelerația unghiulară. Modulul accelerației este:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_\nu^2} = R\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}$$

Dacă mișcarea circulară este *uniformă* sunt valabile următoarele:

$$\theta = \omega_0 t + \theta_0; \omega = \omega_0; \epsilon = 0$$



$$v = R\omega_0; a_\tau = 0; a_\nu = R\omega_0^2$$

Relația dintre viteza unghiulară și turație:

$$\omega_0 = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$$

Dacă mișcarea circulară este *uniform variată* atunci:

$$\theta = \frac{1}{2}\epsilon_0 t^2 + \omega_0 t + \theta_0$$

$$\omega = \epsilon_0 t + \omega_0$$

$$\epsilon = \epsilon_0$$



# Capitolul 5

## Dinamica

### 5.1 Introducere

Dinamica studiază mișcarea sistemelor materiale (puncte materiale, corpuri) ținând cont de forțele exterioare și de masa acestora.

Problemele generale ale dinamicii se pot clasifica astfel:

**problema directă** Se cunosc forțele care acționează asupra sistemului, masa acestuia și condițiile inițiale ale mișcării (poziție, viteze și accelerații) și se urmărește determinarea mișcării reale a sistemului;

**problema inversă** Se cunoaște mișcarea reală a sistemului și se cere determinarea sistemului de forțe exterioare care determină mișcarea;

**problema mixtă** Se cunosc o parte din forțele exterioare care acționează asupra sistemului și unele caracteristici ale mișcării reale și se cer celelalte forțe din sistem și elementele necunoscute ale mișcării.

### 5.2 Formularea problemelor generale ale dinamicii punctului material liber

Pentru un punct material liber, conform principiului al doilea al mecanicii avem:

$$\overline{F} = m \cdot \overline{a}$$

Această relație se mai numește și **ecuația fundamentală a dinamicii**. Forța  $\overline{F}$  depinde, în cazul general, de poziție, viteză și timp.

$$\overline{F} = \overline{F}(\overline{r}, \overline{v}, t)$$

În particular, forța  $\overline{F}$  poate depinde de una sau două din mărimile  $\overline{r}, \overline{v}, t$ .  
Exemple:

- $\overline{F} = \overline{F}(\overline{r}) \leftarrow$  forța elastică ( $\overline{F} = -k\overline{r}$ ), forța de atracție universală
- $\overline{F} = \overline{F}(\overline{v}) \leftarrow$  rezistența aerului  $\overline{F} = -c\overline{v}$
- $\overline{F} = \overline{F}(t) \leftarrow$  forța reactivă a unei rachete  $F = \alpha - \beta t$

În formă vectorială ecuația fundamentală a dinamicii se poate scrie:

$$m \frac{d^2 \overline{r}}{dt^2} = \overline{F} \left( \overline{r}, \frac{d\overline{r}}{dt}, t \right)$$

sau proiectată pe axe:

$$\begin{array}{l} \text{- în sistem cartezian:} \\ \text{- în sistem cilindric:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_\rho(r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}, t) \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_n(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} = F_z(r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}, t) \end{array} \right.$$

Diferite forme ale ecuației fundamentale a dinamicii reprezintă, din punct de vedere matematic, un sistem de trei ecuații diferențiale de ordinul doi, având ca necunoscute trei funcții scalare de timp ( $x(t), y(t), z(t)$ ) sau ( $r(t), \theta(t), z(t)$ ), etc. Presupunând că sistemul poate fi integrat soluțiile vor depinde de parametrul  $t$  și de șase constante de integrare.

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ y &= y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ z &= z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \end{aligned}$$

Aceste expresii reprezintă *soluția generală* a sistemului de ecuații diferențiale. Constantele  $C_1, \dots, C_6$  pot fi determinate punând condițiile inițiale și, după caz, condiții la limită.

$$\begin{aligned} t = 0 \rightarrow x &= x_0; & y &= y_0; & z &= z_0 \\ \dot{x} &= v_{0x}; & \dot{y} &= v_{0y}; & \dot{z} &= v_{0z} \end{aligned}$$

Soluția particulară a sistemului va avea forma:

$$\begin{aligned} x &= f(t, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) \\ y &= f(t, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) \\ z &= f(t, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) \end{aligned}$$

Prin eliminarea timpului  $t$  între aceste ecuații se obțin ecuațiile traiectoriei sub forma:

$$F(x, y, z) = 0; G(x, y, z) = 0 \quad (\text{două suprafețe a căror intersecție este traiectoria})$$

### 5.3 Mișcarea unui punct material liber sub acțiunea greutății proprii

Se consideră că singura forță care acționează asupra punctului material este greutatea  $m \cdot \bar{g}$ , aceasta fiind constantă atât ca mărime cât și ca direcție. Se adoptă un sistem de axe cartezian cu originea în punctul de lansare, cu axa  $Ox$  orizontală și axa  $Oy$  verticală.

La un moment dat pe traiectorie, punctul material este acționat de greutatea sa  $\bar{G} = m \cdot \bar{g}$ . Ecuația fundamentală a dinamicii va fi:

$$m \cdot \bar{a} = m \cdot \bar{g} \quad \text{sau} \quad \bar{a} = \bar{g}$$

Proiectând pe axe rezultă:

$$\ddot{x} = 0; \quad \ddot{y} = -g; \quad \ddot{z} = 0$$

Soluția generală a problemei se obține prin dubla integrare în raport cu timpul:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C_1; & \dot{y} &= -gt + C_2; & \dot{z} &= C_3 \\ x &= C_1t + C_4; & y &= -\frac{gt^2}{2} + C_2t + C_5; & z &= C_3t + C_6 \end{aligned}$$

Condițiile inițiale privind poziția și viteza sunt:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad x &= 0 & y &= 0 & z &= 0 \\ \dot{x} &= v_0 \cos \alpha & \dot{y} &= v_0 \sin \alpha & \dot{z} &= 0 \end{aligned}$$

Înlocuind în soluția generală rezultă:

$$\begin{aligned} C_4 &= 0 & C_5 &= 0 & C_6 &= 0 \\ C_1 &= v_0 \cos \alpha & C_2 &= v_0 \sin \alpha & C_3 &= 0 \end{aligned}$$

Soluția căutată (soluția particulară) va fi:

$$\begin{aligned} x &= (v_0 \cos \alpha)t \\ y &= -\frac{gt^2}{2} + (v_0 \sin \alpha)t \\ z &= 0 \end{aligned}$$

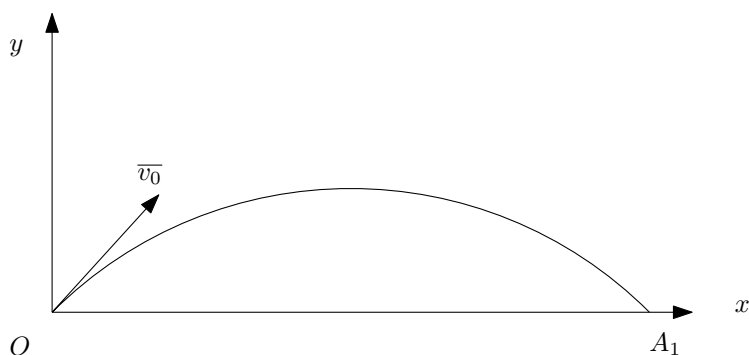
Ecuația  $z = 0$  arată că traiectoria descrisă de punctul material este plană. Ecuația traiectoriei se obține prin eliminarea timpului din primele două ecuații.

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

Traectoria este o parabolă, ecuația sa fiind de gradul 2.

Distanța orizontală maximă, denumită *bătaie*, se obține punând condiția  $y = 0$  și păstrând rădăcina  $x \neq 0$ .

$$x_{max} = OA_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$



Bătaia maximă pentru aceeași viteză inițială se obține pentru  $\sin 2\alpha = 1$  adică pentru  $\alpha = 45^\circ$ .

Înălțimea maximă atinsă de mobil se obține din condiția  $dy/dx = 0$ .

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} 2x + \tan \alpha = 0$$

Astfel, se obține abscisa punctului de înălțime maximă:

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} = \frac{x_{max}}{2}$$

și înălțimea maximă:

$$y_{max} = y\left(\frac{x_{max}}{2}\right) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

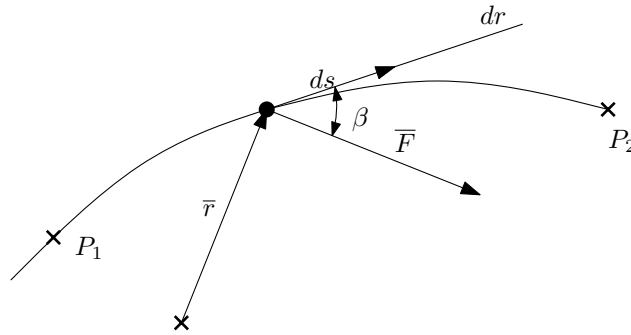
Înălțimea maximă pentru aceeași viteză de lansare se obține pentru  $\sin \alpha = 1$  adică  $\alpha = 90^\circ$ , deci în cazul lansării pe verticală.



## 5.4 Noțiuni de bază energetice

*Lucrul mecanic elementar* este definit ca produsul scalar dintre vectorul forță și vectorul elementar al traiectoriei.

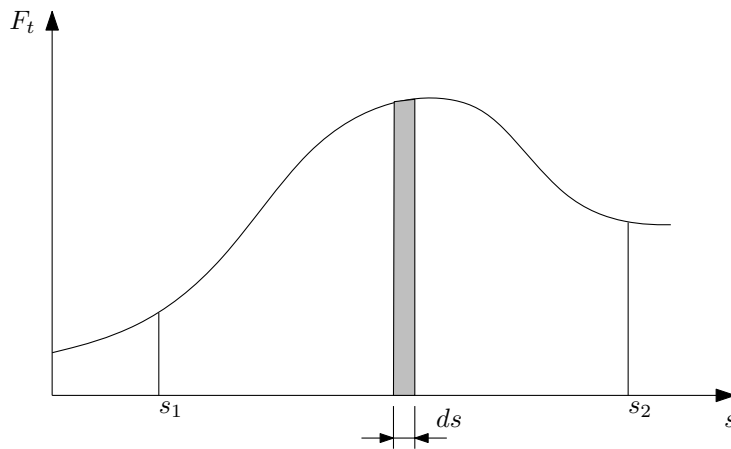
$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cdot ds \cos \beta = F_t \cdot ds$$



*Lucrul mecanic total* se obține integrând lucrul mecanic elementar pe traiectoria punctului material:

$$L = \int_{s_1}^{s_2} F(s) ds = \int_{P_1}^{P_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

și este egal cu aria delimitată de diagrama forță tangențială – deplasare.



Pentru  $F = \text{const.}$  rezultă  $L = F(s_2 - s_1) = F \cdot \Delta s$

*Lucrul mecanic produs de momentul de răsucire*

$$L_M = \int_{\phi_1}^{\phi_2} M_t \cdot d\phi$$

Pentru  $M_t = \text{const.}$  rezultă  $L_M = M_t(\phi_2 - \phi_1) = M_t \cdot \Delta\phi$ .

*Puterea* este lucrul mecanic efectuat în unitatea de timp.

$$P = \frac{dL}{dt}$$

Pentru o forță constantă avem  $P = F \cdot v$  iar pentru un moment de torsiune constant,  $P = M_t \cdot \omega$ .

Relația dintre lucrul mecanic și putere se obține prin integrare:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} dL = \int_{t_1}^{t_2} P \cdot dt = P_m \cdot (t_2 - t_1)$$

unde  $P_m$  =puterea medie.

*Randamentul mecanic* este raportul dintre lucrul mecanic util  $L_u$  și lucrul mecanic utilizat sau consumat  $L_c$ .

$$\eta = \frac{L_u}{L_c}$$

*Relația dintre momentul de torsiune și putere*

$$M_t = \frac{P}{\omega}$$

Dacă  $M_t$  se măsoară în  $Nmm$ , puterea în  $kW$  și viteza unghiulară în  $rot/min$  atunci avem:

$$M_t = \frac{30}{\pi} \cdot 10^6 \frac{P}{n}$$

# Partea II

## Rezistența materialelor



# Capitolul 6

## Generalități

### 6.1 Obiectul și problemele rezistenței materialelor

În mecanica teoretică, corpul solid este considerat rigid. În natură însă nu există corpuri perfect rigide; ele se deformează sub acțiunea sarcinilor, iar când deformațiile depășesc anumite limite, se rup.

Rezistența materialelor este știința care introduce în calcule proprietatea corpurilor de a se deforma, în scopul de a determina dacă ele rezistă sau nu sarcinilor aplicate.

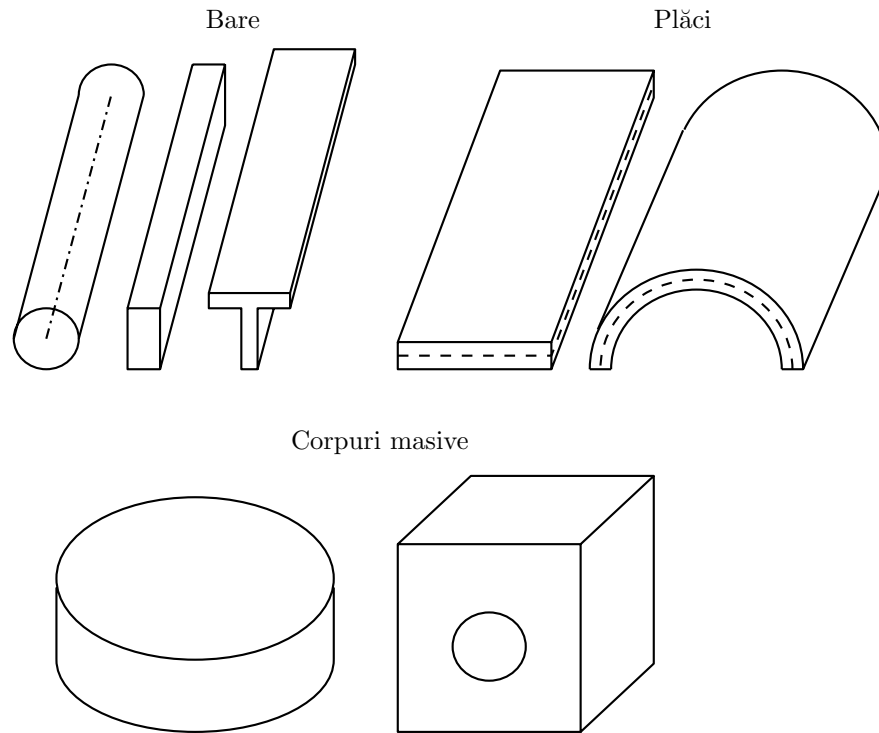
Obiectul rezistenței materialelor poate fi definit astfel:

- *dimensionarea pieselor* de mașini pentru a rezista în bune condiții sarcinilor date;
- *verificarea rezistenței* unor piese de dimensiuni date.

În forma schematizată pentru calcul, corpurile studiate de rezistența materialelor se împart în trei grupe mari:

- I. Corpuri la care una din dimensiuni este predominantă față de celelalte două (corpuri cu fibră medie). Aceste piese poartă denumirea generică de *bare*, iar elementele lor geometrice caracteristice sunt: axa longitudinală și secțiunea plană, perpendiculară pe axa longitudinală.
- II. Corpuri care au două dimensiuni mari în comparație cu a treia. La aceste piese, care poartă denumirea de *plăci*, elementele geometrice caracteristice sunt forma și dimensiunile suprafeței mediane și grosimea măsurată perpendicular pe suprafața mediană. Exemple de astfel de piese sunt: plăci plane, învelitori, vase, tuburi, membrane, etc.

- III. Corpuri masive, având toate cele trei dimensiuni aproximativ de același ordin de mărime. Exemple: bile și role de rulmenți, tuburi cu pereți groși, discuri de turbomașini, blocuri de fundații, etc.



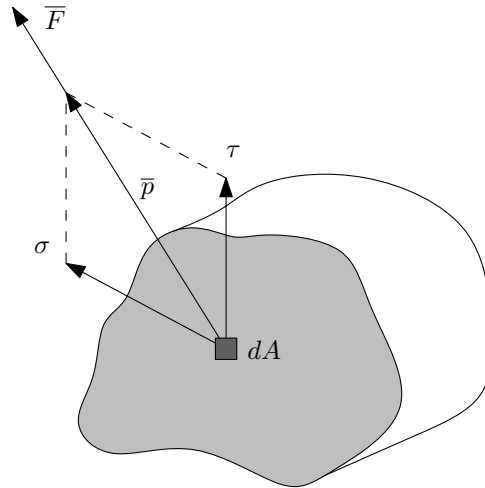
Studiul rezistenței materialelor este mult mai simplu pentru bare decât pentru plăci și corpuri masive. De aceea, se studiază în amănunt barele, în timp ce pentru plăci și corpuri masive se dau numai unele indicații de bază. În practica inginerescă, de cele mai multe ori, problemele care impun calculul tensiunilor și deformațiilor unor piese de tip plăci sau corpuri masive se rezolvă cu ajutorul metodelor numerice (metoda elementului finit) prin utilizarea unor programe specializate.

## 6.2 Eforturi unitare

Mărimea efortului distribuit, aplicat pe unitatea de suprafață din aria secțiunii unui corp se numește *efort unitar*.

$$\bar{p} = \frac{d\bar{F}}{dA}$$

Această mărime poartă și denumirea uzuală de *tensiune*.



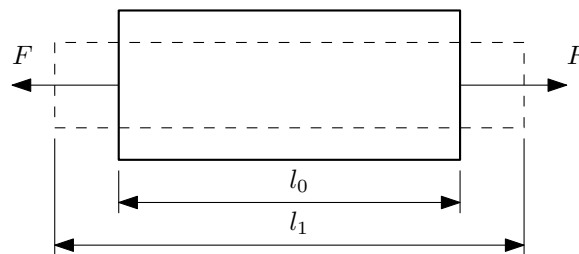
Efortul unitar  $\bar{p}$  poate fi descompus în două componente: pe direcția normalei la secțiune – *efortul unitar normal*,  $\sigma$  – și pe direcție tangentă la secțiune – *efortul unitar tangențial*,  $\tau$ . Efortul unitar  $\sigma$  reprezintă un efect de *întindere* sau *compresiune* în timp ce efortul unitar  $\tau$  reprezintă un efect de *tăiere*, *forfecare* sau *lunecare*.

### 6.3 Deformații și deplasări

În studiul corpurilor deformabile se definesc o serie de mărimi care caracterizează starea lor de deformație:

#### I. Alungirea sau deformația specifică

Considerând o bară sollicitată la întindere sub acțiunea unei forțe exterioare, aceasta suferă o deformație elastică numită *lungire* ( $\Delta l = l_1 - l_0$ ).



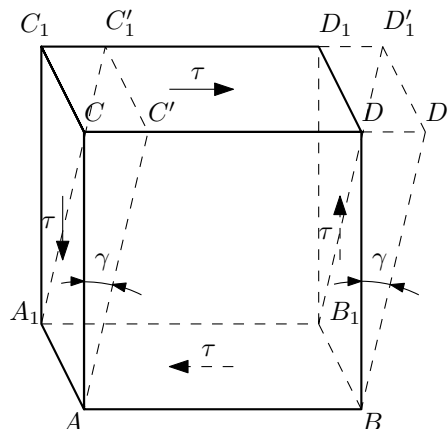
Unitatea de lungime a barei crește, sub efectul sollicitării la întindere, cu cantitatea:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_1 - l_0}{l_0}$$

care poartă denumirea de *alungire* sau *deformație specifică*.

II. *Lunecarea specifică*

Se consideră un element de volum paralelipipedic  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Pe fețele indicate în desen ( $ACA_1 C_1$ ,  $ABA_1 B_1$ ,  $BDB_1 D_1$ ,  $CDC_1 D_1$ ) acționează eforturile unitare tangențiale  $\tau$ . Dacă se consideră fața  $ABA_1 B_1$  imobilă, atunci, din cauza efortului unitar  $\tau$ , fața  $CDC_1 D_1$  alunecă paralel cu ea însăși ajungând în poziția  $C' D' C'_1 D'_1$ . Lunecarea poate fi măsurată prin unghiul  $\gamma$  dintre fețele  $AA_1 C C_1$  și  $AA_1 C' C'_1$ . Acest unghi poartă numele de *lunecare specifică*.

III. *Deplasări*

În decursul procesului de deformare a unui corp majoritatea punctelor sale își schimbă poziția. Drumul parcurs de un punct al corpului în timpul deformării poartă numele de *deplasare*.

## 6.4 Legea lui Hooke

Relația dintre deformații și eforturi unitare este dată de legea lui Hooke:

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad \text{sau pentru eforturi tangențiale} \quad \tau = G \cdot \gamma$$

Legea arată că până la *limita de proporționalitate* alungirile sunt proporționale cu eforturile unitare.



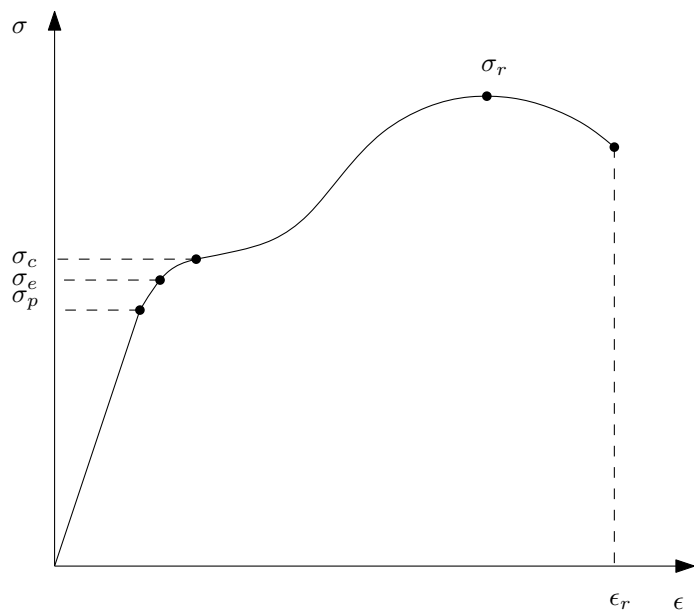


Figura 6.1: Curba caracteristică a materialului

- $\sigma_p$  – limita de proporționalitate
- $\sigma_e$  – limita de elasticitate
- $\sigma_c$  – limita de curgere
- $\sigma_r$  – limita de rupere (rezistența la rupere)
- $\epsilon_r$  – alungirea la rupere
- $E$  – modulul de elasticitate (*modulul lui Young*)
- $G$  – modulul de elasticitate transversal

Legătura dintre cele două module de elasticitate este dată de relația:

$$E = 2G(1 + \nu)$$

unde  $\nu$  – coeficientul de contracție transversală sau *coeficientul lui Poisson*.

Tabela 6.1: Valorile  $E, G, \nu$  pentru unele materiale uzuale

	$E[\text{MPa}]$	$G[\text{MPa}]$	$\nu$
Oțel	$1,9 \div 2,1 \times 10^5$	$7,8 \div 8,2 \times 10^4$	$0,25 \div 0,35$
Fontă	$1,15 \div 1,6 \times 10^5$	$4,5 \times 10^4$	$0,23 \div 0,27$
Aluminiu	$0,67 \div 0,71 \times 10^5$	$2,4 \div 2,7 \times 10^4$	$0,32 \div 0,36$
Bronz	$1,15 \times 10^5$	$4,2 \times 10^4$	$0,32 \div 0,35$
Beton	$0,15 \div 0,23 \times 10^5$	–	$0,16 \div 0,18$
Cauciuc	8	–	0,47
Plută	6	–	0

# Capitolul 7

## Solicitări simple în bare

### 7.1 Întinderea și compresiunea

Dacă asupra unei bare drepte se aplică, pe axa centrelor de greutate, forțe dirijate în lungul axei (forțe normale pe secțiuni), ea este solicitată la întindere sau compresiune. Dacă în lungul axei barei sunt aplicate mai multe forțe, este necesară construcția unei *diagrame a forțelor axiale* care să arate în ce secțiuni forțele axiale sunt maxime.

Într-o secțiune oarecare, forța axială este suma proiecțiilor pe axa barei a tuturor forțelor situate de o parte a secțiunii. Dacă în bară se face o secțiune normală pe axă, forța axială  $N$  produce în secțiune eforturi unitare  $\sigma$ , de același sens cu ea. Se poate scrie că forța din secțiune este rezultanta forțelor  $\sigma \cdot dA$  pe toate elementele secțiunii:

$$N = \int \sigma \cdot dA = \sigma \int dA \quad \text{sau} \quad \sigma = \frac{N}{A}$$

Aceasta este relația fundamentală a solicitării de întindere și compresiune.

#### Deformații și deplasări

Conform legii lui Hooke, alungirea sau scurtarea specifică este:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}$$

Pentru o bară de lungime  $l$ , lungirea este:

$$\Delta l = \int_l \frac{N dx}{EA}$$

Dacă bara are secțiunea constantă iar  $E$  și  $N$  sunt constante pe toată lungimea barei, atunci:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \epsilon \cdot l$$

Din relația  $N = \sigma A$ , în funcție de mărimile care se cunosc rezultă una din următoarele variante:

I. Formula de dimensionare:

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a} \quad \sigma_a = \text{rezistența admisibilă}$$

II. Formula de verificare:

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A_{ef}} \leq \sigma_a$$

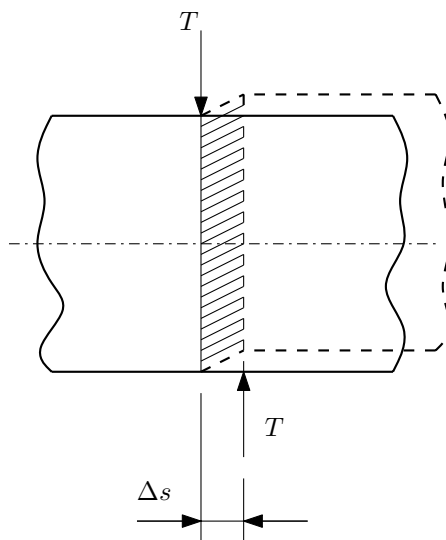
III. Determinarea forței capabile sau admisibile:

$$N = A_{ef} \cdot \sigma_a$$

## 7.2 Forfecarea

Solicitarea simplă de forfecare este produsă de forța tăietoare. Dacă asupra unei bare acționează forțe în plane perpendiculare pe axa barei, acestea produc eforturi unitare tangențiale  $\tau$ . În practică, solicitarea de forfecare este însoțită de regulă de încovoiere, strivire și întindere.

O bară se consideră solicitată la forfecare dacă perpendicular pe axa ei acționează două forțe distribuite liniar, egale și de sens contrar, cu o distanță foarte mică între suporturile lor.



În calculul de forfecare se admite ipoteza simplificatoare a repartiției uniforme a eforturilor unitare tangențiale pe suprafața secțiunii de forfecare. Pe baza relației de echivalență dintre forța tăietoare  $T$  și efortul unitar tangențial  $\tau$  din secțiunea de forfecare avînd aria  $A$ , se poate scrie:

$$T = \int_A \tau dA = \tau \int_A dA = \tau \cdot A$$

de unde rezultă relația:

$$\tau = \frac{T}{A}$$

Aceasta reprezintă formula de bază în calculul convențional la forfecare al pieselor cu secțiuni transversale mici.

Din relația  $\tau = T/A$  rezultă, în funcție de mărimile cunoscute, una din următoarele situații:

I. Calculul de dimensionare:

$$A_{nec} = \frac{T}{\tau_a}$$

II. Calculul de verificare:

$$\tau_{ef} = \frac{T}{A_{ef}} \leq \tau_a$$

III. Calculul efortului capabil:

$$T_{cap} = A_{ef} \cdot \tau_a$$

## 7.3 Încovoierea

Dacă asupra unei bare acționează un moment încovoiator constant de-a lungul ei, în orice secțiune a barei apar numai eforturi unitare normale.

Dacă momentul încovoiator este produs de forțe tăietoare (situate în plane perpendiculare pe axa barei) în secțiunile barei apar eforturi unitare normale  $\sigma$ , produse de momentul încovoiator, și eforturi unitare tangențiale  $\tau$ , produse de forțele tăietoare. În exemplul din figura 7.1, prin deformare, partea superioară a barei se comprimă iar partea inferioară se alungește. Linia care unește centrele de greutate ale tuturor secțiunilor se numește *fibra medie a barei* și rămâne de lungime neschimbată.

Pe secțiune, eforturile unitare variază după curba caracteristică a materialului:

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad \rightarrow \quad \sigma(y) = E \cdot \epsilon(y)$$

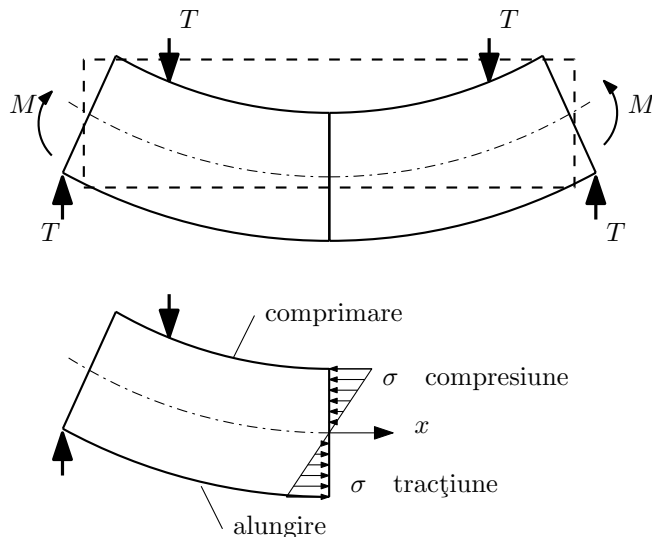


Figura 7.1: Încovoierea barelor

Dar deformația  $\epsilon$  nu este constantă pe toată secțiunea; ea variază liniar de la compresiunea maximă până la alungirea maximă trecând prin zero în dreptul fibrei medii. De asemenea eforturile unitare sunt nule în axa neutră, cresc liniar cu distanța față de axa neutră și sunt maxime în fibrele extreme ale secțiunii (unde distanța  $y$ , față de axa neutră, este maximă).

Valoarea efortului unitar  $\sigma$  în orice punct al secțiunii este dată de formula lui Navier:

$$\sigma = \frac{M}{I_z} y$$

unde  $I_z$  este momentul de inerție axial față de axa  $z$ :  $I_z = \int_A y^2 dA$ .

În calculele de rezistență ne interesează în special valoarea cea mai mare a efortului unitar (care se produce în fibrele extreme). Formula lui Navier devine în acest caz:

$$\sigma_{max} = \frac{y_{max} M}{I_z} = \frac{M}{W_z}$$

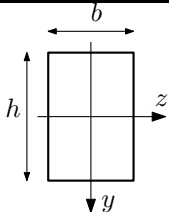
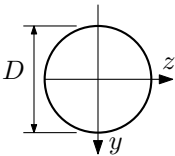
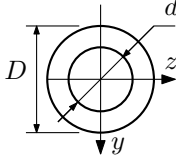
unde  $W_z = I_z / y_{max}$  se numește modul de rezistență la încovoiere.

În funcție de mărimile care se cunosc putem avea:

- formula de dimensionare:

$$W_{nec} = \frac{M}{\sigma_a}$$

Tabela 7.1: Momente de inerție și module de rezistență pentru câteva secțiuni de bară

			
$I_z$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{\pi D^4}{64}$	$\frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$
$I_y$	$\frac{hb^3}{12}$	-	-
$z_{max}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{D}{2}$	$\frac{D}{2}$
$y_{max}$	$\frac{b}{2}$	-	-
$W_z$	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{\pi D^3}{32}$	$\frac{\pi D^3}{32} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right]$
$W_y$	$\frac{hb^2}{6}$	-	-

- formula de verificare:

$$\sigma_{ef} = \frac{M}{W_{ef}} \leq \sigma_a$$

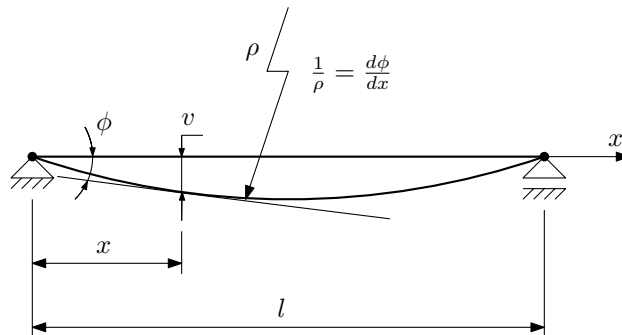
- formula de calcul a momentului capabil:

$$M_{cap} = W_{ef} \cdot \sigma_a$$

## Deformațiile barelor solicitate la încovoiere

Prin solicitarea de încovoiere barele drepte se deformează și iau forme curbe. Studiul se face asupra axei barei care în urma deformației poartă denumirea de *fibră medie deformată* sau *linie elastică a barei*. Prin calcule se urmărește

stabilirea formei fibrei medii deformate și/sau determinarea deplasărilor produse în dreptul unor secțiuni. Într-o secțiune oarecare, mărimile care caracterizează starea de deformație sunt săgeata  $v$  și unghiul  $\phi$ . Studiul deformațiilor constă în aflarea funcțiilor  $v = f_1(x)$  și  $\phi = f_2(x)$ .



Relația dintre  $v$  și  $\phi$  adică între deplasarea transversală (sau săgeata) și unghiul de înclinare a fibrei medii este:

$$\phi = \frac{dv}{dx}$$

Din cele două relații și din relația dintre momentul de încovoiere și rotirea specifică a fibrei medii ( $M = EI_z / \frac{d\phi}{dx}$ ) rezultă ecuația diferențială aproximativă a fibrei medii deformate:

$$\frac{d^2v}{dx^2} \approx -\frac{M}{EI_z}$$

Dacă o bară are rigiditatea la încovoiere  $EI_z$  constantă rezultă următoarele relații diferențiale aproximative de ordin superior ale fibrei medii deformate:

$$\frac{d^3v}{dx^3} \approx -\frac{T}{EI_z}, \quad \text{respectiv} \quad \frac{d^4v}{dx^4} \approx \frac{p}{EI_z}$$

unde  $M$  reprezintă momentul de încovoiere,  $T$  forța tăietoare și  $p$  o sarcină liniară uniform distribuită.

## 7.4 Răsucirea

Răsucirea este solicitarea simplă care apare datorită existenței în secțiunile transversale ale piesei a unui moment de răsucire (torsiune)  $M_t$  având vectorul orientat în lungul axei longitudinale. Piese solicitate la răsucire sunt:



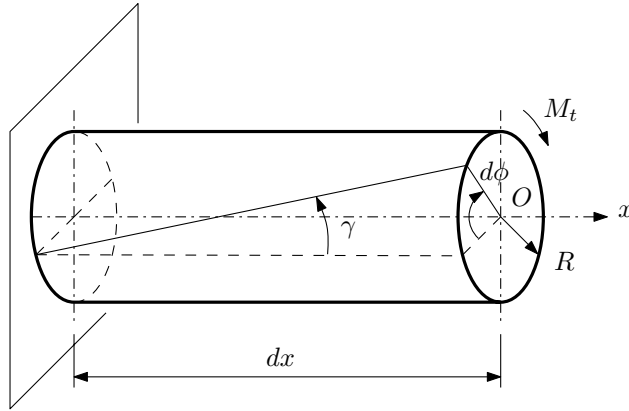


Figura 7.2: Răsucirea unui element de lungime  $dx$  dintr-o bară circulară încastrată la un capăt și încărcată cu momentul de răsucire  $M_t$  la celălalt capăt

arborii, arcurile elicoidale, unele conducte, șasiurile de autovehicule, coca navelor și avioanelor, etc.

Această solicitare este produsă de forțele care nu întâlnesc axa barei, respectiv care nu sunt paralele cu ea.

Calculul de rezistență și de rigiditate la răsucire este simplu în cazul secțiunilor circulare sau inelare și dificil pentru alte forme de secțiuni.

În cazul arborilor de transmisie, încărcarea exterioară este dată prin puterea  $P$  și turația de regim  $n$ , iar calculul momentului de răsucire se face cu relația:

$$M_t = k \cdot \frac{P}{n} \quad [N \cdot mm]$$

unde  $k = 9,55 \times 10^3$  dacă  $P$  este dat în  $kW$  și  $n$  în  $rot/min$ .

Pentru o bară de secțiune circulară sau inelară se poate scrie:

$$\gamma = r \frac{d\phi}{dx}$$

S-a notat cu  $\theta$  unghiul de răsucire specifică (unghiul cu care se rotesc, una față de cealaltă, două secțiuni transversale distanțate cu o unitate de lungime).

Legea lui Hooke pentru răsucire devine:

$$\tau = G \cdot \gamma = Gr\theta$$

Se poate observa că eforturile unitare tangențiale  $\tau$  sunt nule în centrul secțiunii ( $r = 0$ ) și variază liniar cu raza, având valoarea maximă lângă

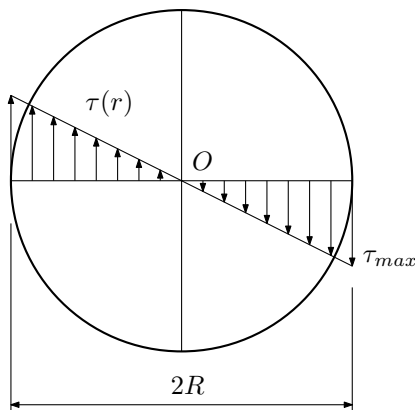


Figura 7.3: Variația efortului unitar tangențial pe secțiunea circulară a unei bare solicate la răsucire

conturul secțiunii:

$$\tau_{max} = G\gamma_{max} = GR\theta$$

Legătura dintre momentul de răsucire  $M_t$  și efortul unitar tangențial  $\tau$  se obține din condiția de egalitate dintre momentul de răsucire și suma momentelor  $\tau dA r$  produse de toate forțele elementare față de centrul  $O$ .

$$M_t = \int_A \tau dA r = \int_A Gr^2\theta dA = G\theta \int_A r^2 dA = G\theta I_p$$

Rezultă că  $G\theta = \frac{M_t}{I_p}$  unde  $I_p$  este momentul de inerție polar

Înlocuind în legea lui Hooke pentru răsucire se obține:  $\tau = \frac{M_t \cdot r}{I_p}$

Efortul unitar maxim se obține pentru  $r = R$ :  $\tau_{max} = \frac{M_t R}{I_p} = \frac{M_t}{W_p}$

unde  $W_p = I_p/R$  este modulul de rezistență polar al secțiunii.

Pentru secțiuni circulare momentul de inerție polar și modulul de rezistență polar sunt:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16}$$

Iar pentru secțiuni inelare:

$$I_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4); \quad W_p = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16D}$$

Relațiile de calcul pentru dimensionare, verificare și moment capabil sunt:

- Dimensionare:  $W_{p\ nec} = \frac{M_t}{\tau_a}$
- Verificare:  $\tau_{ef} = \frac{M_t}{W_{p\ ef}} \leq \tau_a$
- Calculul momentului de răsucire capabil:  $M_{t\ cap} = W_{p\ ef}\tau_a$

### Deformația de răsucire

Unghiul de răsucire specifică este:

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} = \frac{M_t}{GI_p}$$

Pe de altă parte:

$$d\phi = \theta dx \Rightarrow d\phi = \frac{M_t dx}{GI_p}$$

$d\phi$  – unghiul de răsucire al unui element de lungime infinit mică ( $dx$ ).

Integrând pe o lungime dată  $l$ , se obține deformația totală:

$$\Delta\phi = \frac{M_t l}{GI_p}$$



# Capitolul 8

## Solicitări compuse

### 8.1 Introducere

În capitolul anterior au fost studiate bare în a căror secțiune transversală apare numai unul din eforturile de tracțiune – compresiune ( $N$ ), forfecare ( $T$ ), încovoire ( $M_i$ ) sau răsucire ( $M_t$ ). În aceste bare ia naștere o solicitare simplă. În practică se întâlnesc, în cele mai multe cazuri, bare în a căror secțiune transversală apar două sau mai multe eforturi simultan. În astfel de cazuri se spune că în aceste bare ia naștere o *solicitare compusă*. Din combinarea celor patru eforturi, se realizează următoarele categorii de solicitări compuse:

- solicitări datorate acțiunii simultane a eforturilor de tracțiune – compresiune și încovoire care produc în secțiune numai eforturi unitare normale  $\sigma$ ;
- solicitări datorate acțiunii simultane a eforturilor de forfecare și de răsucire care produc în secțiune numai eforturi unitare tangențiale  $\tau$ ;
- solicitări datorate acțiunii atât a eforturilor de tracțiune – compresiune și încovoire, cât și a eforturilor de forfecare și răsucire și care produc eforturi unitare normale  $\sigma$  și tangențiale  $\tau$ .

Studiul solicitărilor compuse constă în determinarea efortului unitar rezultat și în stabilirea relațiilor de dimensionare sau verificare.

### 8.2 Întinderea sau compresiunea excentrică

Considerând o bară de secțiune constantă, într-un punct oarecare din secțiunea barei, situat pe o axă principală de inerție (ex. o axă de simetrie) se

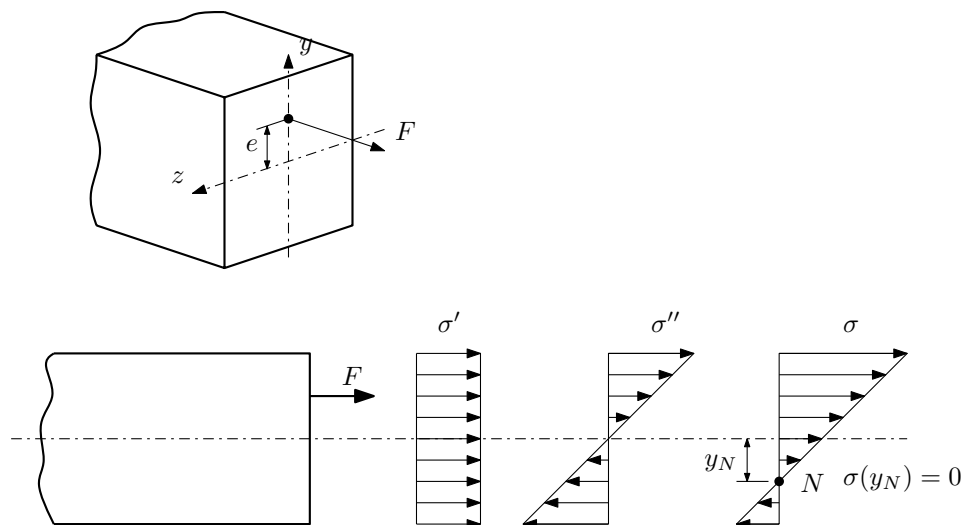


Figura 8.1: Întinderea cu o forță excentrică

aplică o forță normală de întindere  $F$ . Această forță produce pe întreaga secțiune eforturi unitare  $\sigma' = F/A$ , iar momentul încovoietor datorat excentricității  $e$  a punctului de aplicație a forței produce eforturi unitare date de legea lui Navier:

$$\sigma'' = \frac{yM_z}{I_z} = \frac{yeF}{I_z}$$

Prin însumarea efectelor se află efortul unitar rezultat:

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = \frac{F}{A} + \frac{yeF}{I_z}$$

Ca urmare a acțiunii excentrice a forței  $F$ , axa neutră se mută din centrul de greutate și trece prin punctul  $N$ , a cărui poziție  $y_N$  este obținută din condiția de efort unitar nul:

$$0 = \frac{F}{A} + \frac{y_N e F}{I_z} \Rightarrow y_N = -\frac{I_z}{eA}$$

Efortul unitar maxim apare în fibra extremă din apropierea punctului de aplicație al forței  $F$ .

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{y_{max} e F}{I_z} = \frac{F}{A} + \frac{eF}{W_z}$$

În cazul general, când forța  $F$  este aplicată într-un punct oarecare  $B(y_0, z_0)$  al secțiunii, prin reducerea sistemului de forțe în raport cu centrul de greutate

al secțiunii, rezultă o forță axială  $N = F$  cu punctul de aplicație în centrul de greutate și două momente de încovoiere  $M_{iz} = Fy_0$  și  $M_{iy} = Fz_0$ .

Efortul unitar rezultat într-un punct oarecare al secțiunii este:

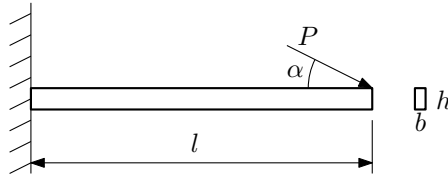
$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{yy_0F}{I_z} + \frac{zz_0F}{I_y} = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{yy_0A}{I_z} + \frac{zz_0A}{I_y} \right)$$

Ecuția axei neutre se obține din condiția  $\sigma = 0$ :

$$1 + \frac{yy_0A}{I_z} + \frac{zz_0A}{I_y} = 0$$

### Exemplificare:

Să se dimensioneze bara din figură, de secțiune dreptunghiulară cu  $h = 1,5b$  dacă se cunosc:  $P = 20kN$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $l = 2m$ ,  $\sigma_a = 100MPa$ .



Secțiunea periculoasă este în încăstrare, unde există un moment încovoiator  $M$  și o forță de întindere  $N$ :

$$M = P \sin \alpha \cdot l = 20000 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2000 = 2 \times 10^7 N \cdot mm$$

$$N = P \cos \alpha = 20000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 17300N$$

Aria secțiunii și modulul de rezistență au expresiile:

$$A = b \cdot h = 1,5b^2; W = \frac{bh^2}{6} = \frac{2,25}{6}b^3 = 0,375b^3$$

Formula de dimensionare este:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{17300}{1,5b^2} + \frac{2 \cdot 10^7}{0,375b^3} = 100MPa$$

de unde rezultă:  $0,375b^3 \cdot 17300 + 1,5b^2 \cdot 2 \times 10^7 = 1,5b^2 \cdot 0,375b^3 \cdot 100$

$$\text{sau } b^3 - 115,3b - 533333 = 0$$

care are două rădăcini complexe și una reală:  $b = 81,57mm$  Se adoptă:  $b = 82mm$  și  $h = 123mm$

### 8.3 Încovoiere cu răsucire

Un exemplu curent pentru solicitarea compusă de încovoiere și răsucire îl reprezintă arborii mașinilor. Astfel de piese se verifică cu ajutorul expresiilor eforturilor unitare echivalente.

Prima etapă de calcul o constituie determinarea separată a eforturilor unitare  $\sigma$  și  $\tau$ . Acestea pot rezulta din solicitări simple, fiind calculate cu relațiile cunoscute:

- pentru eforturi unitare normale:

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \text{sau} \quad \sigma = \frac{M}{W} \quad \text{sau} \quad \sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W}$$

- pentru eforturi unitare tangențiale:

$$\tau = \frac{TS}{bI} \quad \text{sau} \quad \tau = \frac{M_t}{W_p} \quad \text{sau} \quad \tau = \frac{TS}{bI} + \frac{M_t}{W_p}$$

După ce s-au aflat valorile de calcul pentru  $\sigma$  și  $\tau$  în punctul considerat, se aplică una din cele patru teorii de rezistență:

I. Teoria efortului unitar maxim

$$\sigma_{ech} = 0,5\sigma + 0,5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_a$$

II. Teoria deformațiilor specifice maxime

$$\sigma_{ech} = 0,35\sigma + 0,65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_a$$

III. Teoria efortului unitar tangențial maxim

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_a$$

IV. Teoria energiei de deformație

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_a$$

În cazul arborilor cu diametrul  $d$  solicitați la încovoiere și răsucire avem:

$$\sigma = \frac{M_i}{W_z} = \frac{M_i}{\frac{\pi d^3}{32}} \quad \tau = \frac{M_t}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{M_t}{2W_z}$$

Conform teoriei a III-a rezultă:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\frac{M_i^2}{W_z^2} + \frac{4M_t^2}{(2W_z)^2}} = \frac{\sqrt{M_i^2 + M_t^2}}{W_z} = \frac{M_{i\ ech}}{W_z}$$

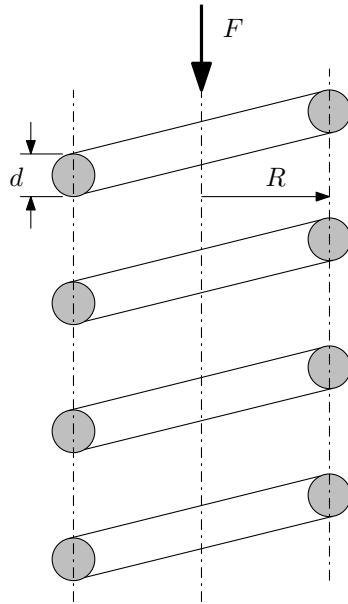
unde s-a notat  $M_{i\ ech} = \sqrt{M_i^2 + M_t^2}$ .



## 8.4 Răsucire cu forfecare

Un exemplu des întâlnit de piesă sollicitată la răsucire și forfecare este arcul elicoidal. În acest caz, momentul de răsucire și forța tăietoare sunt:

$$M_t = F \cdot R \quad \text{și} \quad T = F$$



Valoarea maximă a efortului unitar tangențial datorat răsucirii este:

$$\tau_{1 \max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{FR}{\frac{\pi d^3}{16}}$$

Eforturile unitare tangențiale produse de forțe tăietoare sunt:

$$\tau_2 = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi d^2}$$

Prin suprapunerea efectelor, efortul unitar tangențial maxim este:

$$\tau_{\max} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{16FR}{\pi d^3} + \frac{4F}{\pi d^2} = \frac{16FR}{\pi d^3} \left( 1 + \frac{d}{4R} \right)$$

$$\text{sau} \quad \tau_{\max} = \tau_1 \left( 1 + \frac{d}{4R} \right)$$



# Capitolul 9

## Solicitări variabile

### 9.1 Noțiuni generale

În majoritatea organelor de mașini sarcinile aplicate variază în timp. Se spune că piesele sunt supuse la *solicitări variabile*. În funcție de modul cum variază în timp, solicitările variabile pot fi:

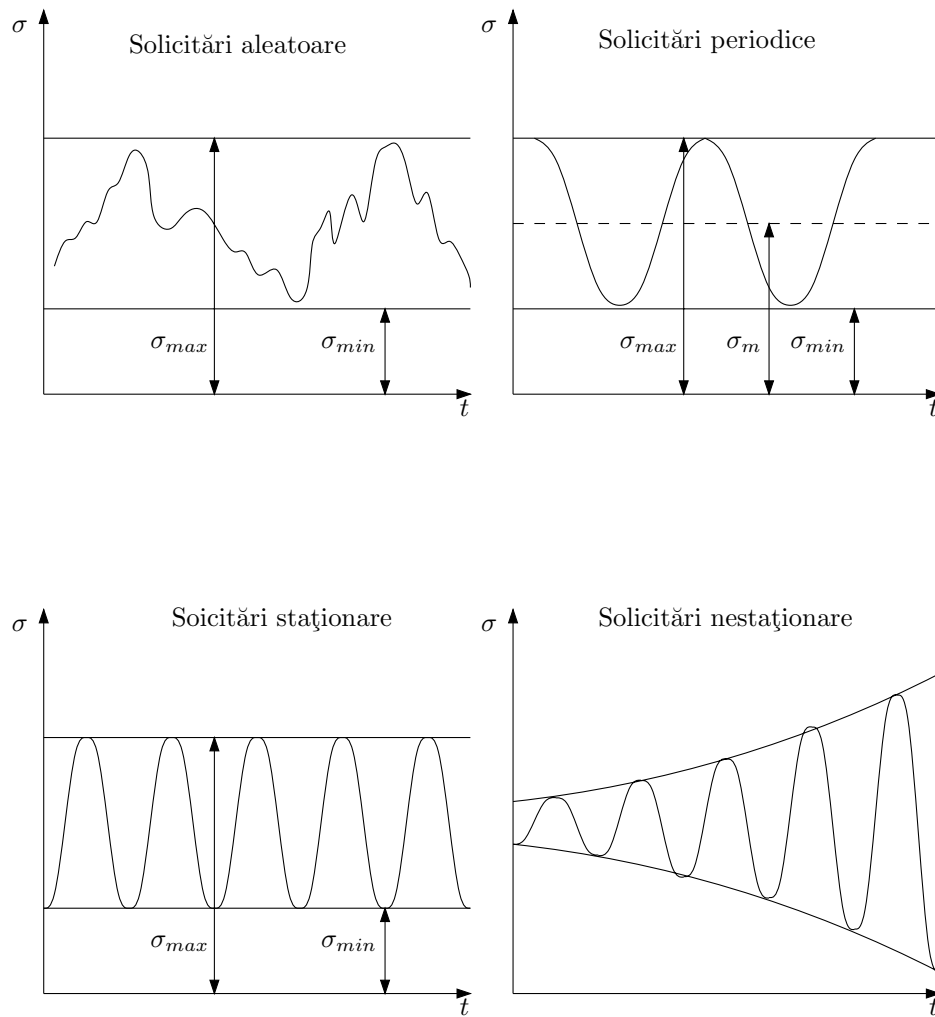
- *solicitări aleatoare*, la care nu se poate stabili o regulă de variație sau o periodicitate (ex. solicitări în piesele componente ale autovehiculelor, avioanelor, etc);
- *solicitări periodice* care se produc după intervale regulate de timp. La rândul lor, solicitările periodice se pot împărți în *solicitări staționare* (la care eforturile variază între o limită superioară și una inferioară) și *solicitări nestaționare* (când eforturile unitare variază ca amplitudine).

Solicitările variabile repetate de un număr mare de ori au un efect nefavorabil asupra capacității de rezistență a materialului, în comparație cu comportarea lui la solicitări statice. Acest fenomen poartă denumirea de *oboseală a materialelor*.

Din cauza complexității calculului, se preferă ca piesele supuse la solicitări variabile să fie dimensionate ca și când ar fi supuse la solicitări statice, aplicând un coeficient de siguranță obținut din calculul propriu-zis la oboseală.

Variația efortului unitar în timpul unei perioade formează un ciclu. Rezistența materialelor la solicitări ciclice (variabile) este influențată de valoarea și semnul efortului unitar maxim  $\sigma_{max}$  și a celui minim  $\sigma_{min}$ . Dacă se cunoaște efortul unitar maxim și minim al ciclului se poate determina o valoare constantă a efortului unitar numită *media ciclului*,

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$



și o valoare a efortului unitar variabilă numită amplitudinea ciclului,

$$\sigma_v = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

Cunoscând valorile  $\sigma_m$  și  $\sigma_v$  se pot determina  $\sigma_{max}$  și  $\sigma_{min}$ :

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_v$$

$$\sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_v$$

Raportul dintre efortul unitar minim și cel maxim poartă de numirea de coeficient de asimetrie al ciclului și se notează cu  $R = \sigma_{min}/\sigma_{max}$ .

După mărirea coeficientului de asimetrie se disting:

- cicluri *simetrice* pentru care  $\sigma_{max} = -\sigma_{min}$ ;  $\sigma_m = 0$ ;  $\sigma_v = \sigma_{max}$  și  $R = -1$ ;
- cicluri *asimetrice* la care  $R \neq 1$ .

După semnele eforturilor unitare avem:

- cicluri *alternante* la care efortul unitar își schimbă semnul;
- cicluri *oscilante* la care efortul unitar rămâne tot timpul cu același semn.

Un ciclu oscilant poate fi pozitiv sau negativ. Când una din limitele efortului este nulă ciclul se numește *pulsant pozitiv* ( $R = 0$ ).

## 9.2 Curbele Wöhler

Caracteristica mecanică a unui material la solicitări variabile este *rezistența la oboseală* ce se poate determina prin mai multe metode. O metodă clasică, directă de determinare a rezistenței la oboseală este metoda Wöhler, prin care epruvetele se solicită la cicluri alternant simetrice. După metoda Wöhler rezistența la oboseală se determină prin construirea așa-numitelor *curbe de oboseală*.

Într-o încercare Wöhler, prima din seria de epruvete se încearcă la un efort unitar maxim de aproximativ 40% . . . 60% din rezistența la rupere ( $\sigma_r$ ). Epruveta se rupe după un anumit număr de cicluri ( $N_1$ ). Următoarele epruvete se încarcă cu eforturi din ce în ce mai mici. Se constată că micșorând pe  $\sigma_{max}$  se mărește numărul de cicluri până la rupere. La o anumită valoare a

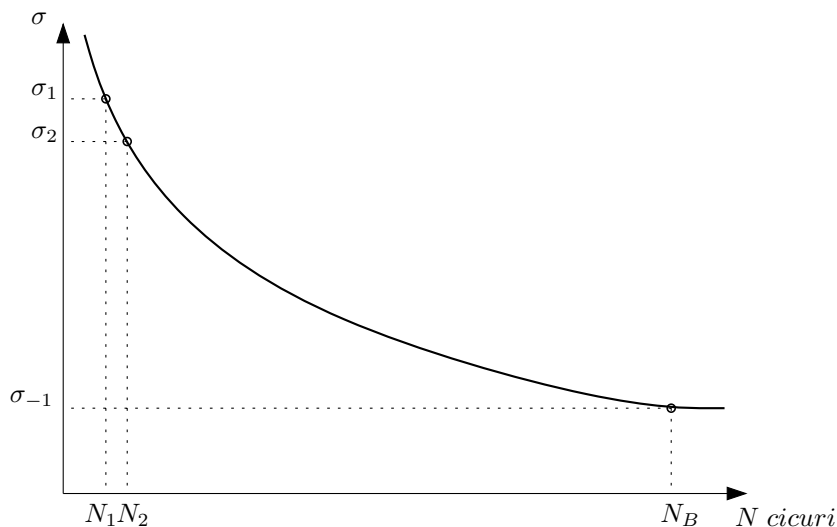


Figura 9.1: Curba de durabilitate sau curba Wöhler

lui  $\sigma_{max}$  epruveta nu se mai rupe. Acestei limite i se dă numele de rezistență la oboseală.

Rezistența la oboseală este cea mai mare valoare a efortului unitar maxim pe care epruveta o suportă un timp indefinit fără a se rupe. Încercarea se întrerupe după un număr convențional de cicluri de solicitare  $N_B$  numit bază de încercare ( $N_B = 10^6 \dots 10^8$ ).

Orice material are o infinitate de rezistențe la oboseală, după coeficientul de asimetrie și după felul solicitării. Cele mai cunoscute sunt rezistențele la oboseală prin cicluri simetrice și pulsante. Simbolurile pentru rezistențele la oboseală poartă ca indici valorile coeficientului de asimetrie:

- $\sigma_{-1}$  – rezistență la oboseală prin ciclu simetric de încovoiere
- $\sigma_{-1t}$  – rezistență la oboseală prin ciclu simetric de întindere–compresiune
- $\tau_{-1}$  – rezistență la oboseală prin ciclu simetric de răsucire
- $\sigma_0$  – rezistență la oboseală prin ciclu pulsant de încovoiere
- $\sigma_{0t}$  – rezistență la oboseală prin ciclu pulsant de întindere
- $\sigma_{0c}$  – rezistență la oboseală prin ciclu pulsant de compresiune
- $\tau_0$  – rezistență la oboseală prin ciclu pulsant de răsucire
- $\sigma_R$  – rezistență la oboseală prin ciclu oarecare de încovoiere

- $\sigma_{Rt}$  – rezistență la oboseală prin ciclu oarecare de întindere
- $\tau_R$  – rezistență la oboseală prin ciclu oarecare de răsucire

Pentru o solicitare dată, rezistențele la oboseală prin ciclu simetric sunt cele mai mici; cele pentru ciclu pulsant sunt mai mari; iar cele de rupere statică sunt cele mai mari. Pentru că  $R = +1$  corespunde unei solicitări statice, se obișnuiește să se noteze  $\sigma_r = \sigma_{+1}$ .

## 9.3 Factori de influență a rezistenței la oboseală

Rezistența la oboseală este o mărime complexă care depinde de o serie de factori. Se poate face o sistematizare a acestor factori, împărțindu-i în factori *constructivi*, *tehnologici* și *de lucru*.

### 9.3.1 Factori constructivi

#### Concentrarea eforturilor unitare

Fenomenul de concentrare a eforturilor se manifestă prin faptul că o piesă cu concentrator are o rezistență la oboseală inferioară celei a piesei fără concentrator de aceleași dimensiuni. Coeficientul efectiv de concentrare la solicitări variabile sau factorul de reducere a rezistenței la oboseală este definit prin raportul

$$K_f = \frac{\sigma_R}{\sigma_{Rk}}$$

unde  $\sigma_R$  este rezistența la oboseală a epruvetei netede iar  $\sigma_{Rk}$  a celei cu concentrator.

#### Dimensiunile piesei

Rezistența la oboseală a unei epruvete scade cu creșterea diametrului său. Pentru a se ține seama de influența dimensiunilor piesei, se introduce în calcule un coeficient de mărime *epsilon*, definit ca raport între rezistența la oboseală a epruvetei netede de diametru  $d$  și rezistența la oboseală a epruvetei de diametru  $d_0$  (7...10mm).

$$\epsilon_\sigma = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\sigma_{-1})_{d_0}} \quad \text{sau} \quad \epsilon_\tau = \frac{(\tau_{-1})_d}{(\tau_{-1})_{d_0}}$$

Coeficientul dimensional  $\epsilon$  este subunitar.

### 9.3.2 Factori tehnologici

#### Materialul și tehnologia de fabricație

Rezistența la oboseală depinde și de natura materialului precum și de tehnologia de prelucrare a piesei. O structură a materialului neuniformă, cu granulație mare rezultă într-o rezistență la oboseală scăzută. Prin utilizarea unor tehnologii corecte, a unor tratamente termice corespunzătoare se obține o creștere a rezistenței la oboseală.

#### Starea suprafeței

Unul din factorii esențiali care influențează rezistența la oboseală este starea suprafeței piesei. Existența zgârieturilor pe suprafața piesei reprezintă o sursă de fisuri și micșorează rezistența la oboseală. Coeficientul de stare a suprafeței  $\gamma$  este raportul

$$\gamma = \frac{\sigma_{-1p}}{\sigma_{-1}}$$

în care:  $\sigma_{-1p}$  este rezistența la oboseală a epruvetei având suprafața cu o prelucrare oarecare;  $\sigma_{-1}$  – rezistența la oboseală a epruvetei cu suprafața lustruită.

### 9.3.3 Influența condițiilor de lucru

- I. Acțiunea agenților corozivi
- II. Variația solicitărilor – rezistența la oboseală este influențată defavorabil de existența *suprasolicitărilor* (solicitări de durată limitată mai mari decât rezistența la oboseală)
- III. Temperatura – rezistența scade la temperaturi înalte
- IV. Felul solicitării – valorile rezistenței la oboseală diferă în funcție de felul solicitării (întindere, încovoiere, răsucire, etc)
- V. Asimetria ciclului

## 9.4 Calculul coeficientului de siguranță la solicitări simple produse de sarcini variabile ciclice

Datele necesare calculului coeficientului de siguranță se concretizează prin:



- cunoașterea ciclului de solicitări variabile nominal:  $\sigma_{max}, \sigma_{min}, \sigma_m, \sigma_v, R$ ;
- cunoașterea proprietăților materialului piesei:  $\sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_c, \sigma_r$ ;
- cunoașterea factorilor care influențează rezistența la oboseală:  $K_f, \epsilon, \gamma$

Calculul la solicitări variabile constă de obicei în determinarea coeficientului de siguranță și compararea lui cu o valoare dinainte impusă. Acest coeficient este definit ca raport între efortul unitar maxim al ciclului limită și cel al ciclului real:

$$c = \frac{\sigma_{max} L}{\sigma_{max}}$$

#### 9.4.1 Calculul coeficientului de siguranță pentru cicluri alternant simetrice

$$c = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_f}{\epsilon \cdot \gamma} \cdot \sigma_v}$$

#### 9.4.2 Calculul coeficientului de siguranță pentru cicluri asimetrice

Metoda Söderberg

$$c_\sigma = \frac{1}{\frac{K_{f\sigma} \cdot \sigma_v}{\epsilon_\sigma \gamma_\sigma \sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_r}} \quad \text{sau} \quad c_\sigma = \frac{1}{\frac{K_{f\sigma} \cdot \sigma_v}{\epsilon_\sigma \gamma_\sigma \sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_c}}$$

iar pentru eforturi unitare tangențiale:

$$c_\tau = \frac{1}{\frac{K_{f\tau} \cdot \tau_v}{\epsilon_\tau \gamma_\tau \tau_{-1}} + \frac{\tau_m}{\tau_r}} \quad \text{sau} \quad c_\tau = \frac{1}{\frac{K_{f\tau} \cdot \tau_v}{\epsilon_\tau \gamma_\tau \tau_{-1}} + \frac{\tau_m}{\tau_c}}$$

Metoda Serensen

$$c_\sigma = \frac{1}{\frac{K_{f\sigma} \cdot \sigma_v}{\epsilon_\sigma \gamma_\sigma \sigma_{-1}} + \psi \frac{\sigma_m}{\sigma_{-1}}} \quad \text{unde} \quad \psi = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}$$

### 9.4.3 Calculul coeficientului de siguranță la solicitări compuse pentru cicluri simetrice

$$c = \frac{c_\sigma c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2 + c_\tau^2}}$$

în care  $c_\sigma, c_\tau$  sunt coeficienți de siguranță parțială la încovoiere, respectiv la răsucire și care se calculează cu formulele lui Söderberg sau Serensen.

# Partea III

## Organe de maşini



# Capitolul 10

## Îmbinări sudate

### 10.1 Noțiuni generale

Sudarea este o metodă de îmbinare nedemontabilă a două sau mai multe piese metalice la care legătura dintre piese se realizează în urma solidificării unei topituri rezultate din metalele de sudat cu sau fără material de adaos, sau prin presarea pieselor aduse în prealabil în stare plastică în zona îmbinării.

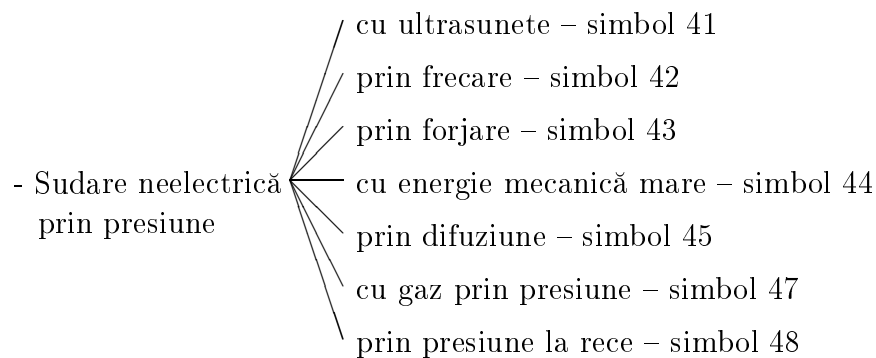
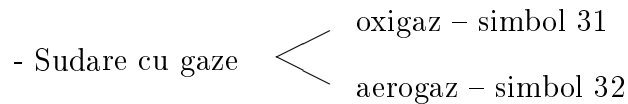
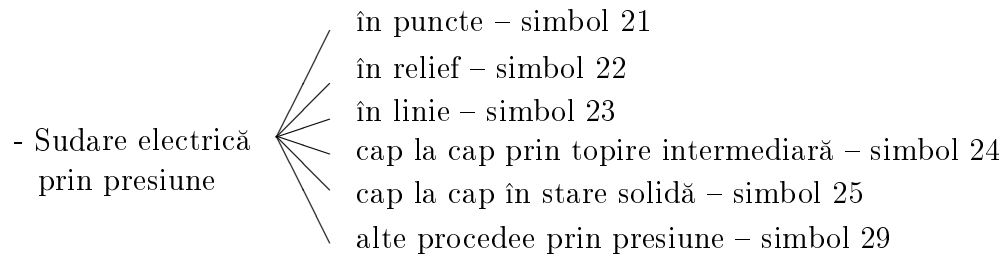
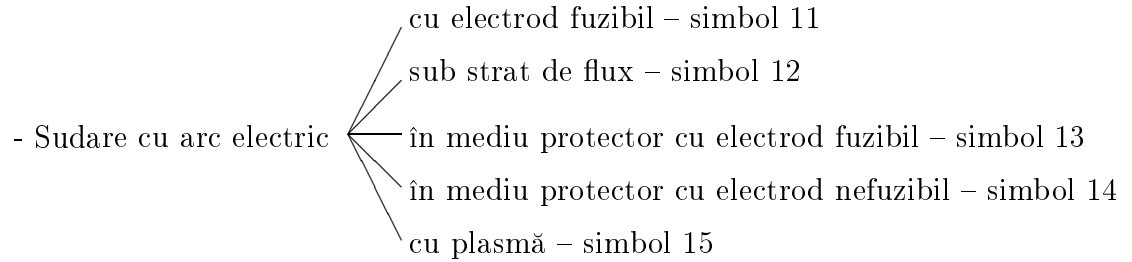
Tehnologia sudării cuprinde următoarele etape:

- alegerea și pregătirea materialelor ce urmează a fi sudate;
- alegerea materialului de adaos, a sursei de energie și a poziției de sudare;
- stabilirea parametrilor regimului de sudare;
- executarea sudurii propriu-zise;
- lucrări complementare: tratamente termice (recoacere sau detensionare), curățire de stropi, vopsire, control de calitate, etc.

Avantaje ale îmbinărilor sudate: în comparație cu piesele obținute prin turnare, construcțiile sudate sunt mai ușoare; rezistențe mecanice superioare; forme constructive mai raționale; cost de fabricație scăzut; posibilitatea realizării unor piese de dimensiuni mari.

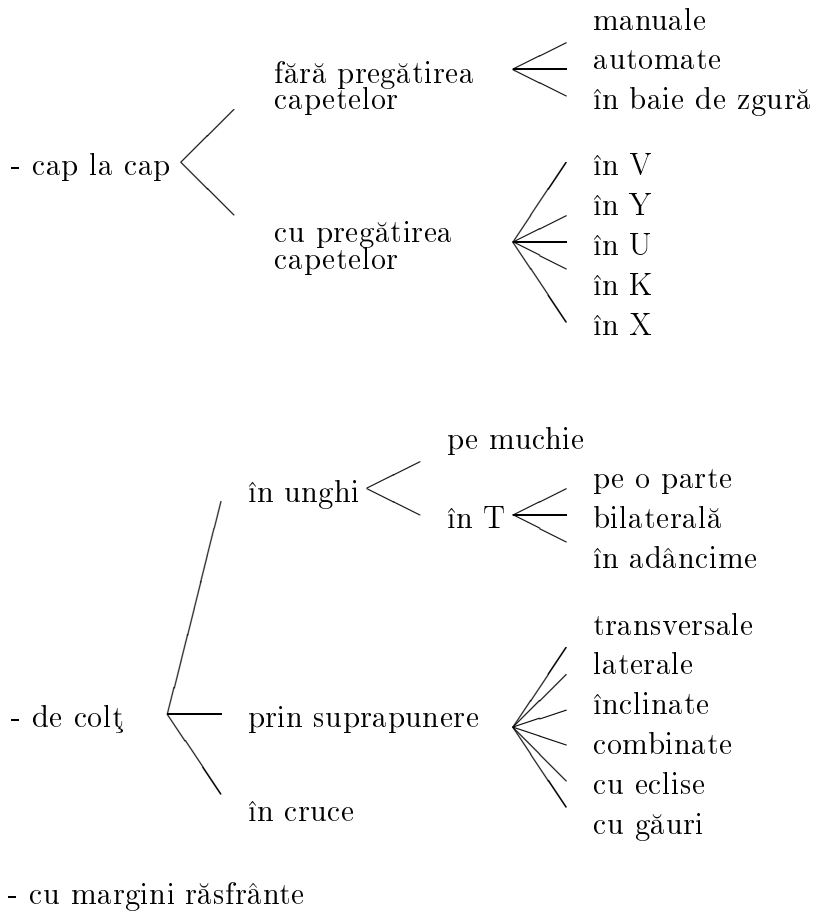
Dezavantaje: apariția tensiunilor interne; modificări structurale în zona îmbinării; dependența calității sudurii de priceperea și calificarea sudorului.

Clasificarea procedurilor de sudare (conform STAS 8325-77):



- Alte procedee de sudare (simbol 7)

Clasificarea îmbinărilor sudate prin topire:



Sudura *cap la cap* este una dintre cele mai importante procedee de îmbinare în construcțiile sudate. Ea este cu atât mai avantajoasă cu cât grosimea tablelor este mai mare.

Sudura *de colț* este o sudură prin topire la care materialul de adaos este depus în interiorul unui unghi drept.

Sudura *cu margini răsfrânte* este folosită în special pentru îmbinarea tablelor subțiri, supuse unor solicitări reduse.

Proprietatea metalelor de a fi sudate, denumită *sudabilitate*, depinde în primul rând de compoziția chimică și de structura metalului de bază, dar și de alți factori cum ar fi: felul și dimensiunile construcției, calitatea materialului de adaos, etc.

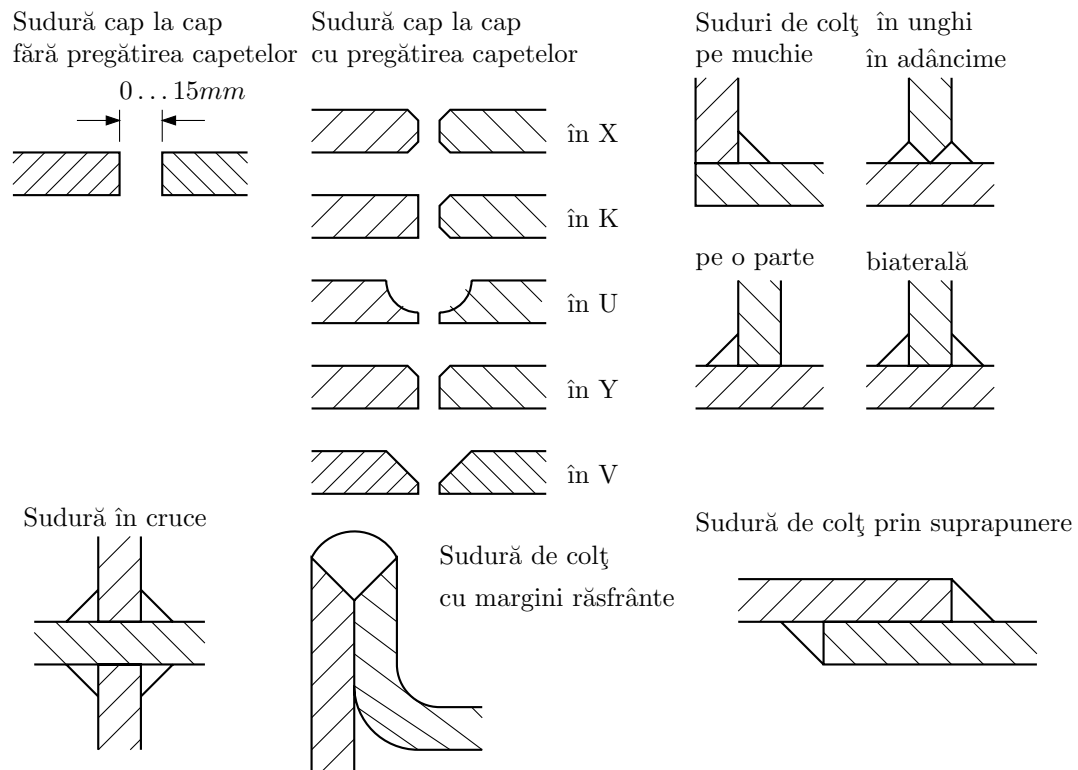


Figura 10.1: Îmbinări sudate prin topire



## 10.2 Calculul îmbinărilor sudate

Rezistențele admisibile ale îmbinărilor sudate sunt determinate de rezistența admisibilă a metalului de bază și a materialului de adaos, de procesul tehnologic de sudare, de tratamentele termice ulterioare. Rezistențele admisibile ale cusăturilor (cordoanelor) de sudură sunt mai reduse față de cele ale metalului de bază datorită existenței tensiunilor interne și structurii neomogene. Astfel, tensiunile admisibile ale cordoanelor de sudură se determină cu relația:

$$\sigma_{sa} = \phi \sigma_a$$

unde  $\sigma_a$  este tensiunea admisibilă minimă a materialelor sudate;  $\phi$  – coeficientul de calitate a sudurii.

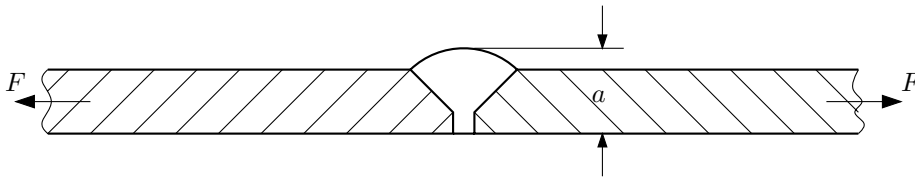
Dimensiunile secțiunii de calcul ale cordonului de sudură se stabilesc astfel:

- lungimea de calcul este  $l = l_s - 2a$ , unde  $l_s$  este lungimea efectivă a cusăturii, iar  $a$  este lungimea craterelor de la capetele cordonului (considerate egale cu grosimea tablei).
- grosimea  $a$  de calcul, considerată la sudurile cap la cap, va fi egală cu grosimea tablei  $S$ .

### 10.2.1 Calculul sudurilor cap la cap

În cazul solicitărilor axiale (tensiune–compresiune) efortul unitar normal este:

$$\sigma_s = \frac{F}{A_s} = \frac{F}{a(l_s - 2a)} \leq \phi \cdot \sigma_a$$



Pentru creșterea capacității portante a sudurii se utilizează cordoane înclinate. Prin descompunerea forței  $F$  după două direcții (normală și tangențială) se obțin eforturile unitare din cusătură:

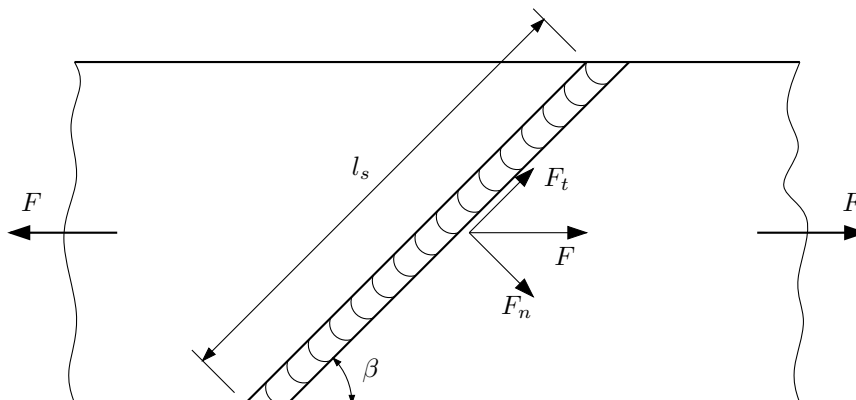
$$\sigma_s = \frac{F_n}{A_s} = \frac{F \sin \beta}{al}$$

$$\tau_s = \frac{F_t}{A_s} = \frac{F \cos \beta}{al}$$

Efortul unira echivalent este:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_s^2 + \lambda \tau_s^2} \leq \phi \sigma_a$$

unde  $\lambda$  este un coeficient a cărui valoare se determină experimental. Conform ISO se recomandă  $\lambda = 1,8$ .



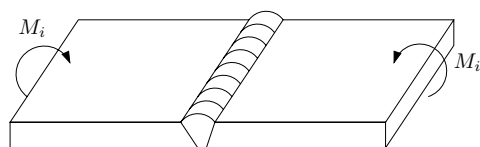
În cazul solicitărilor la încovoiere, efortul unitar din cordonul de sudură este:

$$\sigma_s = \frac{M_i}{W_s} \leq \phi \sigma_a$$

unde  $M_i$  este momentul încovoiator și  $W_s$  este modulul de rezistență a cusăturii (cordonului).

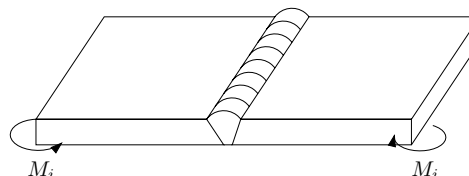
$$W_s = \frac{la^2}{6}$$

pentru



$$W_s = \frac{l^2 a}{6}$$

pentru



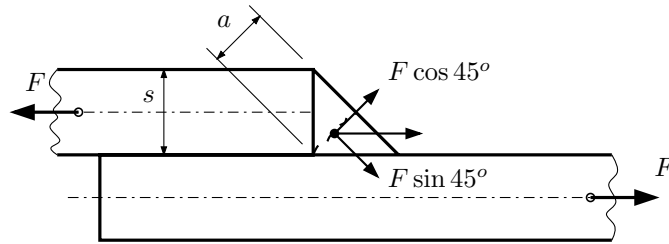
## 10.2.2 Calculul sudurilor de colț

### Cusături de colț prin suprapunere

Acest tip de cusătură a tablelor suprapuse poate fi pe o singură parte sau pe ambele părți (monofrontală sau bifrontală).

Înălțimea cordonului de sudură în secțiunea periculoasă este:

$$a = s \cdot \sin 45^\circ \approx 0,7s$$



a) **Cusătura solicitată la tracțiune sau compresiune:** Datorită excentricității punctelor de aplicație a forțelor și a înclinării la  $45^\circ$  a secțiunii periculoase, în cordonul de sudură apar trei tipuri de tensiuni: tracțiune-compresiune, forfecare și încovoiere.

Tensiunea de încovoiere se poate neglija datorită dimensiunii reduse a brațului momentului de încovoiere. Neglijând această ultimă solicitare avem:

- tracțiune-compresiune:

$$\sigma_s = \frac{F}{l_s \cdot a} \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{F}{l_s \cdot a}$$

-forfecare:

$$\tau_{fs} = \frac{F}{l_s \cdot a} \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{F}{l_s \cdot a}$$

-tensiunea echivalentă:

$$\sigma_{es} = \sqrt{\sigma_s^2 + \tau_{fs}^2} = \frac{F}{l_s \cdot a} \leq \sigma_{as}$$

*Pentru toate cusăturile de colț, indiferent de felul solicitării, valoarea tensiunii admisibile este limitată la valoarea admisibilă la forfecare  $\tau_{afs}$ .*

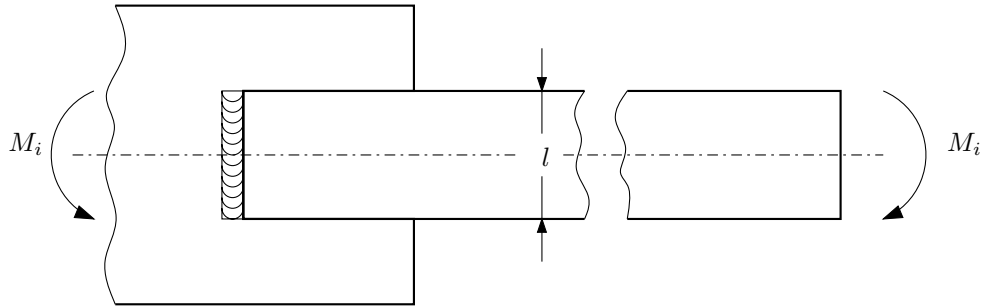
Convențional, calculul cusăturilor de colț frontale, se face la forfecare în secțiunea  $A_s = l_s \cdot a$  din planul înclinat la  $45^\circ$ :

$$\tau_{fs} = \frac{F}{l_s \cdot a} = \frac{F}{0,7l_s \cdot s}$$

b) **Cusătura solicitată la încovoiere** Se calculează în mod convențional tot la forfecare. În planul bisector al cordonului, tensiunile normale se pot determina din condiția de rezistență la încovoiere:

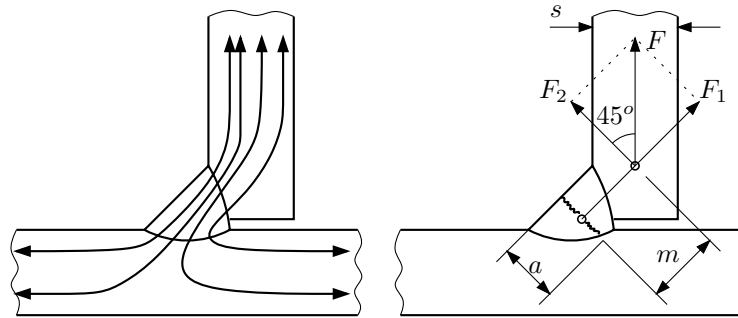
$$\sigma_{is} = \frac{M_i}{W_s}$$

unde  $W_s = al_s^2/6 = 0,7sl_s^2/6$  (pentru cusătura monofrontală).



### Cusături de colț în unghi (în T)

Acest tip de îmbinare este solicitată complex și, în același timp, constituie un concentrator puternic de tensiuni. Curbarea puternică a liniilor de forță echivalează cu o concentrare de tensiuni provocată de un șanț îngust.



a) Cusătură în T sub acțiunea unei forțe de tracțiune Forța  $F$  se descompune în două componente (paralelă și perpendiculară pe secțiunea periculoasă a cordonului de sudură):

$$F_1 = F_2 = F \cos 45^\circ = 0,7F$$

Aceste componente provoacă următoarele tensiuni:

-tracțiune:

$$\sigma_{ts} = \frac{F_1}{l_s a} = \frac{0,7F}{l_s a}$$

-încovoiere:

$$\sigma_{is} = \pm \frac{F_2 m}{W_s} = \frac{0,7F m}{\frac{l_s a^2}{6}} = \frac{4,2F m}{l_s a^2}$$

-forfecare:

$$\tau_{fs} = \frac{F_2}{l_s a} = \frac{0,7F}{l_s a}$$

Tabela 10.1: Relații de calcul pentru cusăturile de colț prin suprapunere

Cusătură frontală solici- tată la tracțiune – com- presiune		$\tau_{fs} = \frac{F}{l_s \cdot a} = \frac{F}{0,7l_s \cdot s}$
Cusătură frontală solici- tată la încovoiere		$\sigma_{is} = \frac{6M_i}{0,7sl^2}$
Cusătură frontală solici- tată la încovoiere și tracțiune – compresiune		$\sigma_{tot\ s} = \frac{F}{0,7l_s s \pm \frac{6M_i}{0,7sl^2}}$
Cusături laterale solici- tate la tracțiune – com- presiune		$\tau_{fs} = \frac{F}{2l_{1s}a} = \frac{F}{1,4l_{1s}s}$
Cusături laterale solici- tate la încovoiere		$\tau_{fs} = \frac{M_i}{(l+s)l_{1s}a} = \frac{M_i}{0,7(l+s)l_{1s}s}$
Cusături laterale și cusătură frontală su- puse la tracțiune – compresiune		$\tau_{fs} = \frac{F}{0,7s(l_s+2l_{1s})}$
Cusături laterale și cusătură frontală supuse la încovoiere		$\tau_{fs} = \frac{6M_i}{0,7s[l_s^2+6l_{1s}(l+s)]}$
Cordon circular supus la răsucire		$\tau_s = \frac{16M_t(D+2a)}{\pi[(D+2a)^4-D^4]}$ <p>dacă <math>a \ll D</math>:</p> $\tau_s = \frac{2M_t}{\pi(D+0,7a)^2a}$

Tensiunea echivalentă este:

$$\sigma_{es} = \sqrt{(\sigma_{ts} + \sigma_{is})^2 + \tau_{fs}^2} \leq \sigma_{as}$$

**b) Cusătură în T sub acțiunea unui moment încovoiator** Astfel de situații apar de exemplu în cazul grinzilor sau suporturilor solidarizate prin sudare cu un perete sau cu un stâlp metalic. În acest caz, în secțiunea cordonului de sudură apar tensiuni de încovoiere și de forfecare:

- încovoiere:

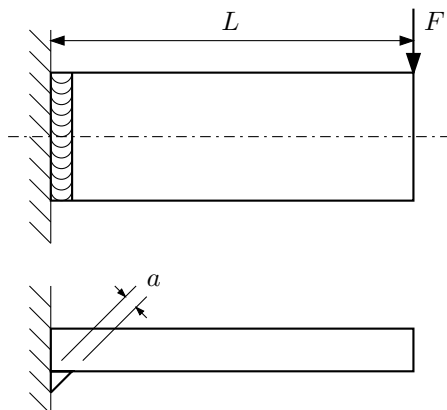
$$\sigma_{is} = \pm \frac{6M_i}{al_s^2} = \pm \frac{6FL}{0,7sl_s^2}$$

- forfecare:

$$\tau_{fs} = \frac{F}{l_s a} = \frac{F}{0,7l_s s}$$

Efortul unitar echivalent este:

$$\sqrt{\sigma_{is}^2 + \tau_{fs}^2} \leq \tau_{afs}$$



În cazul în care cusătura se face pe ambele părți și direcția forței este perpendiculară pe direcția cordoanelor de sudură, tensiunile vor fi:

- încovoiere:

$$\sigma_{is} = \pm \frac{M_i}{W_s} = \pm \frac{FL}{W_s}$$

unde:

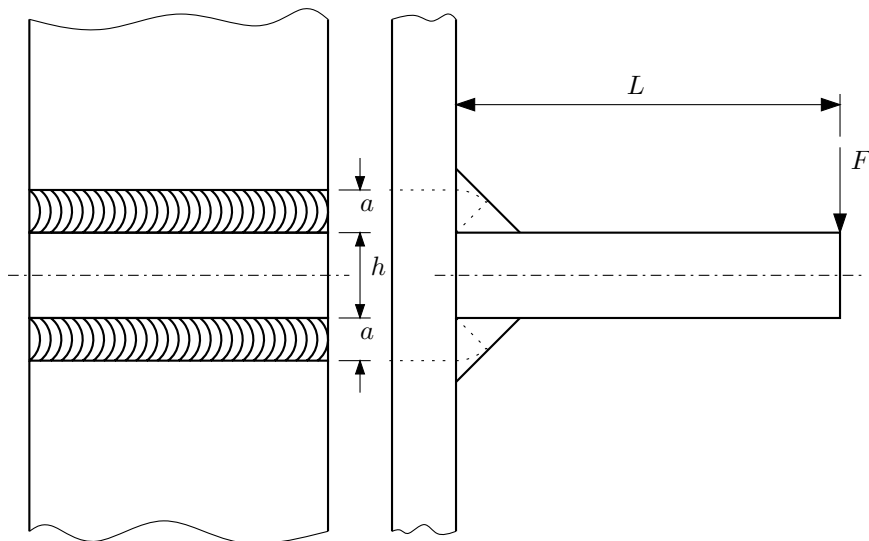
$$W_s = \frac{2}{h+2a} \left[ \frac{l_s(h+2a)^3}{12} - \frac{l_s h^3}{12} \right]$$

- forfecare:

$$\tau_{fs} = \frac{F}{2l_s a}$$

Tensiunea echivalentă rezultă ca mai înainte:

$$\sigma_{es} = \sqrt{(\sigma_{ts} + \sigma_{is})^2 + \tau_{fs}^2}$$







# Capitolul 11

## Asamblări demontabile

### 11.1 Asamblări filetate

Asamblările filetate fac parte dintre cele mai răspândite asamblări demontabile. Deși în aparență simplu ca organ de mașină, șurubul implică probleme foarte complicate. Principalul avantaj al unei astfel de asamblări este ușurința de montare și demontare.

Rolul funcțional al șuruburilor este foarte larg:

- strângere (asamblări demontabile, creare de tensiune, etanșare);
- reglaj (fixarea poziției);
- transformarea mișcării de rotație în mișcare de translație și invers;
- transformarea forțelor periferice mici în forțe axiale mari (mengine, prese, etc);
- măsurare (micrometrul).

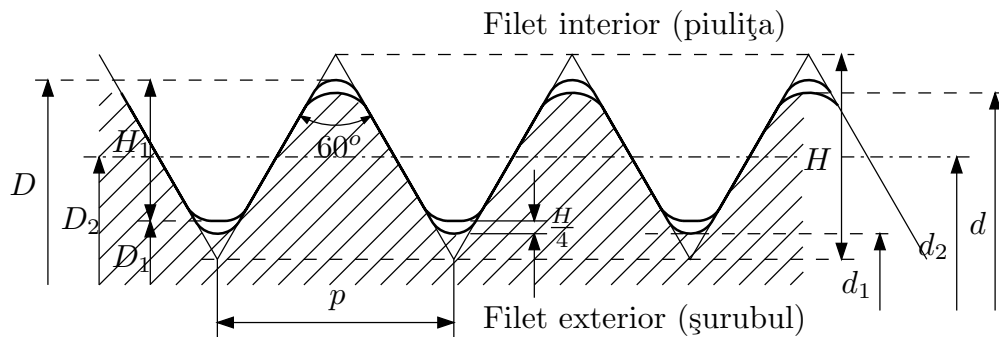
În prezent există două standarde importante de filete destinate asamblărilor: standardul *metric* și standardul *“unified inch”*. Ambele standarde sunt utilizate pe scară largă dar există tendința de migrare către sistemul metric. Standardizarea filetului metric s-a făcut sub egida ISO (International Standardization Organization) în 1969, iar standardul *“unified inch”* a rezultat în urma unui acord între comitetele de standardizare din Canada, Marea Britanie și Statele Unite în 1984. Simbolurile pentru cele două standarde de filete sunt M pentru metric, respectiv UN pentru *“unified inch”*. Formele profilelor M și UN sunt la fel dar filetele M sunt executate la dimensiuni metriche (în mm) în timp ce filetele UN sunt executate la dimensiuni imperiale (în *“inch”* sau țoli).

Pentru șuruburile destinate transmiterii sau transformării mișcării există o serie de *filete de mișcare*. Astfel de filete sunt: filetul pătrat, filetul trapezoidal (cel mai utilizat) și filetul fierăstrău (variantă a filetului trapezoidal capabilă să preia forțe mari într-un singur sens).

Pentru destinații speciale, se poate menționa filetul rotund folosit în scopuri multiple precum: cuplele vagoanelor, armături hidraulice, socluri și dulii (filet Edison) etc.

Caracteristicile dimensionale ale filetelor sunt:

- $d$  – diametrul exterior care delimitează vârfurile filetelor;
- $d_1$  – diametrul interior care delimitează fundul filetului;
- $d_2$  – diametrul mediu  $d_2 = \frac{d_1+d}{2}$ ;
- $p$  – pasul filetului;
- $H$  – înălțimea profilului generator;
- $H_1$  – înălțimea spirei șurubului;
- $\alpha$  – unghiul de vârf al profilului;
- $\beta$  – unghiul de înclinare al spirei.



### 11.1.1 Materiale utilizate pentru fabricarea șuruburilor

Pentru fabricarea șuruburilor și piulițelor se utilizează oțeluri carbon obișnuite OL37 – OL50, fontă, oțeluri carbon de calitate OLC30, OLC35, OLC40. Pentru șuruburi expuse la solicitări mari se utilizează oțeluri aliate 41Cr10, 35CrNi15, 35MoCr11. Pentru filete puțin solicitate se pot utiliza și materiale plastice.

### 11.1.2 Calculul asamblărilor filetate

Cauzele principale de scoatere din uz a șuruburilor sunt: ruperea tijei în zona primei spire în contact cu piulița, în zona trecerii de la partea filetată la partea nefiletată și în zona de racordare a tijei la capul șurubului, precum și deteriorarea spirelor șurubului și piuliței.

În funcție de modul de acționare a sarcinii exterioare față de axa șurubului se redau următoarele cazuri de calcul:

- șuruburi montate fără prestrângere inițială solicitate de forțe axiale centrice;
- șuruburi montate cu prestrângere inițială solicitate de forțe axiale centrice;
- șuruburi solicitate de forțe axiale excentrice;
- șuruburi solicitate la sarcini transversale;

#### a) Șuruburi montate fără prestrângere inițială solicitate de forțe axiale centrice

Este cazul șuruburilor care sunt solicitate numai când asupra lor acționează o sarcină exterioară.

Efortul de întindere din tija șurubului este:

$$\sigma_t = \frac{F}{A_s} = \frac{4F}{\pi d_1^2} \leq \sigma_{at}$$

În cazul dimensionării, diametrul interior necesar al tijei filetate este:

$$d_{1nec} = \sqrt{\frac{4F}{\pi \sigma_{at}}}$$

#### b) Șuruburi montate cu prestrângere inițială solicitate de forțe axiale centrice

Este cazul majorității asamblărilor cu șurub. La aceste asamblări, cu ocazia montării, se crează o forță inițială  $F_0$  de întindere a tijei șurubului.

Efortul din șurub este același ca în cazul precedent dar majorat cu un coeficient  $k$  ce ține seama și de solicitarea de răsucire ( $k = 1, 3$ ).

$$\sigma_t = \frac{4kF_t}{\pi d_1^2}$$

unde  $F_t = F_0 + F$  este forța totală în exploatare.

Pentru dimensionare se utilizează relația:

$$d_{1nec} = \sqrt{\frac{4kF}{\pi\sigma_{at}}}$$

### c) Șuruburi solicitate de forțe axiale excentrice

Această solicitare apare atunci când șuruburile au cap excentric și când suprafețele de reazem ale capului șurubului și piuliței nu sunt paralele.

Sub acțiunea forței  $F$  și a excentricității  $e$ , în șurub apar tensiuni de întindere  $\sigma_t$  și de încovoiere  $\sigma_i$ .

Efortul total va fi:

$$\sigma_{tot} = \sigma_t + \sigma_i = \frac{4F}{\pi d_1^2} + \frac{32Fe}{\pi d_1^3} = \frac{4F}{\pi d_1^2} \left( 1 + \frac{8e}{d_1} \right)$$

### d) Șuruburi solicitate la sarcini transversale

Asemenea îmbinări se pot realiza în două variante: șuruburi montate fără joc (ajustate) și șuruburi montate cu joc.

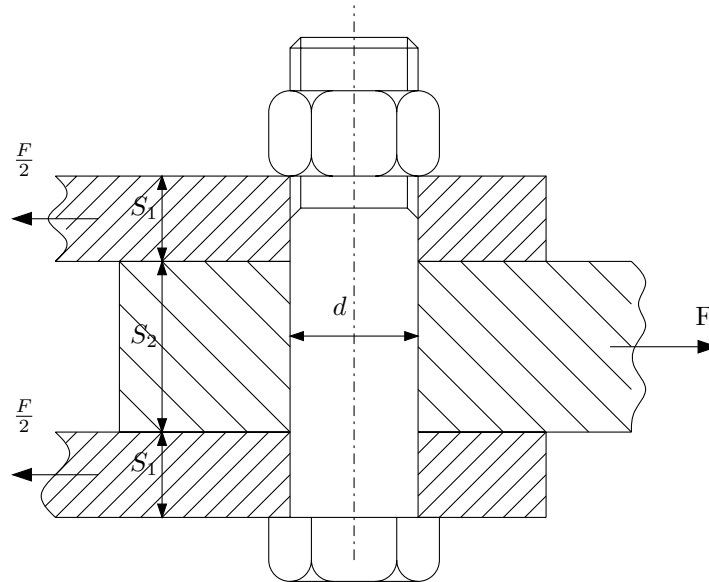
**1. Șuruburi montate fără joc** Sarcina transversală este preluată de tija șurubului, dând naștere unei tensiuni de forfecare:

$$\tau_f = \frac{F}{\frac{\pi d_1^2}{4} i} \leq \tau_{af}$$

unde  $i$  este numărul secțiunilor de forfecare.

De asemenea, tija șurubului mai este solicitată și la strivire:

$$\sigma_s = \frac{F}{S_2 d} \leq \sigma_{as} \quad \text{și} \quad \sigma_s = \frac{F/2}{S_1 d} \leq \sigma_{as}$$



**2. Șuruburi montate cu joc** Sarcina transversală este preluată de forțele de frecare ce apar între piesele strânse cu forța  $F_0$  de prestrângere.

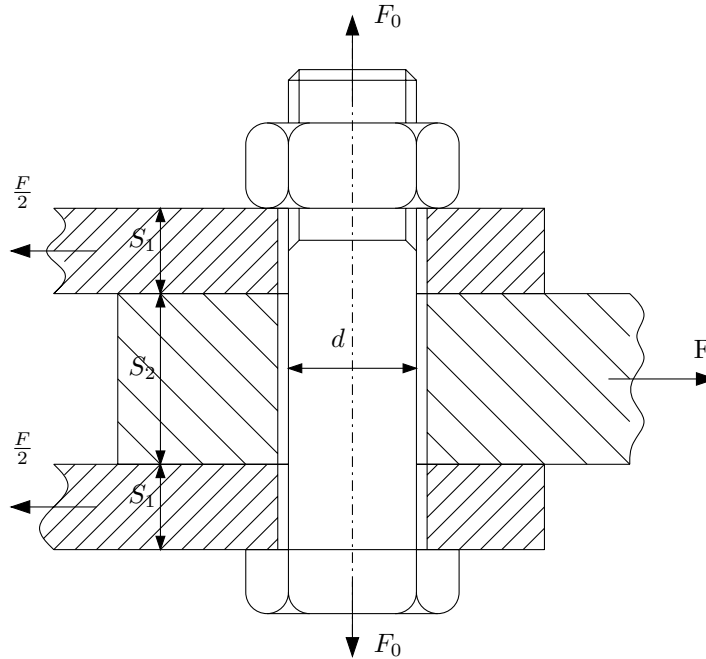
$$F_0 = \frac{\beta F}{\mu i}$$

unde  $\beta = 1,5 \dots 2$  este coeficientul de siguranță la alunecare a pieselor;  $\mu$  – coeficientul de frecare dintre piese;  $i$  – numărul secțiunilor de alunecare.

Efortul din șurub este:

$$\sigma_t = \frac{k F_0}{\frac{\pi d_1^2}{4}} \leq \sigma_{at}$$

( $k = 1, 3$  – coeficient care ține seama de solicitarea suplimentară de răsucire de la montaj)



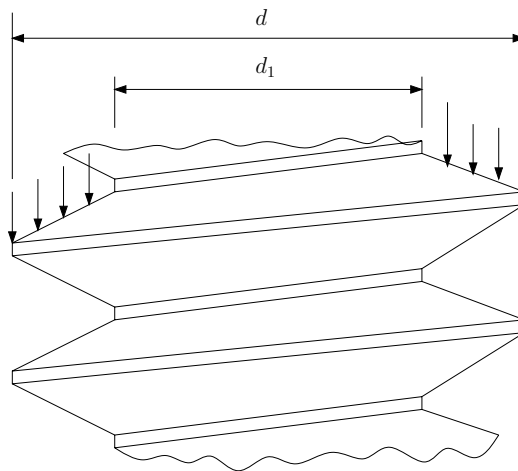
### e) Solicitățile filetului

Spira filetului poate fi privită ca o grindă curbă încastrată pe cilindrul de bază. Solicitățile la care este supusă o spirală sunt strivirea, forfecarea și încovoierea.

1. **Strivirea** Efortul unitar de strivire este:

$$\sigma_s = \frac{F}{zA_s} = \frac{F}{z \frac{\pi}{4} (d^2 - d_1^2)} \leq \sigma_{as}$$

unde  $z$  – numărul de spire

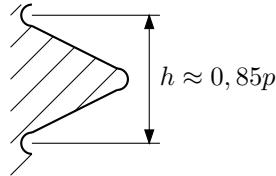


**2. Forfecarea** Efortul unitar de forfecare este:

$$\tau_f = \frac{F}{\pi z d_1 h} \leq \tau_{af}$$

unde  $h$  – înălțimea secțiunii de rupere ( $h \approx 0,85p$ )

În general efortul unitar de forfecare se neglijează.



**3. Încovoierea** Pentru ușurința calculului, spira se poate desfășura, asimilându-se cu o grindă dreaptă încastrată, solicitată de un moment încovoiator dat de sarcina  $F/z$ , acționând la un braț de pârghie ( $\frac{H_2}{2} + a$ ).

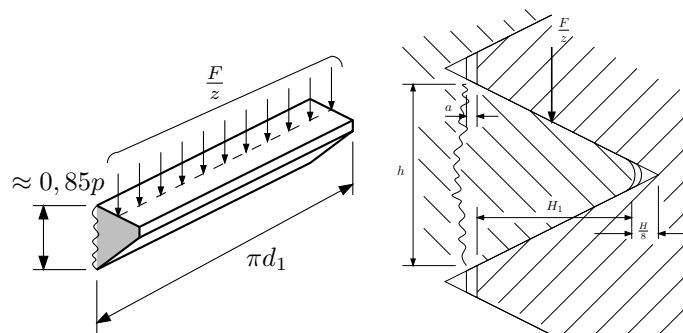
Pentru filetul metric rezultă:

$$\sigma_i = \frac{M_i}{W_z} = \frac{\frac{F}{z} \left( \frac{H_2}{2} + a \right)}{\frac{1}{6} \pi d_1 h^2} = \frac{6F \left( \frac{H_2}{2} + a \right)}{\pi z d_1 h^2} \leq \sigma_{ai}$$

unde  $H_2$  – înălțimea efectivă a filetului

$$H_2 \approx H_1 = \frac{5}{8} H = 0,541p$$

$a$  – jocul de fund;  $a \approx 0,054p$



### 11.1.3 Determinarea înălțimii piuliței

Determinarea înălțimii piuliței se reduce la calculul numărului de spire active,  $z$ . Acest calcul se face în baza condiției de egală rezistență a tijei șurubului la tracțiune și a filetului la strivire ( $F_{caps} = F_{capf}$ ).

Forța capabilă a șurubului (solicitat la tracțiune) este:

$$F_{caps} = \frac{\pi}{4} d_1^2 \sigma_{at}$$

Forța capabilă a filetului (din solicitarea de strivire) este:

$$F_{capf} = \frac{\pi}{4} (d^2 - d_1^2) z \sigma_{as}$$

$$\text{Se pune deci condiția: } \frac{\pi}{4} d_1^2 \sigma_{at} = \frac{\pi}{4} (d^2 - d_1^2) z \sigma_{as}$$

$$\text{Rezultă: } z = \frac{d_1^2 \sigma_{at}}{(d^2 - d_1^2) \sigma_{as}} \quad d_1 \approx 0,8d \quad \text{și} \quad \frac{\sigma_{at}}{\sigma_{as}} \approx 2,3 \quad (\text{pt. OL37})$$

$$\Rightarrow z_{min} \approx 4 \quad \text{iar înălțimea piuliței} \quad m = z \cdot p$$

Prin standarde s-a stabilit  $m \approx 0,8d$ .

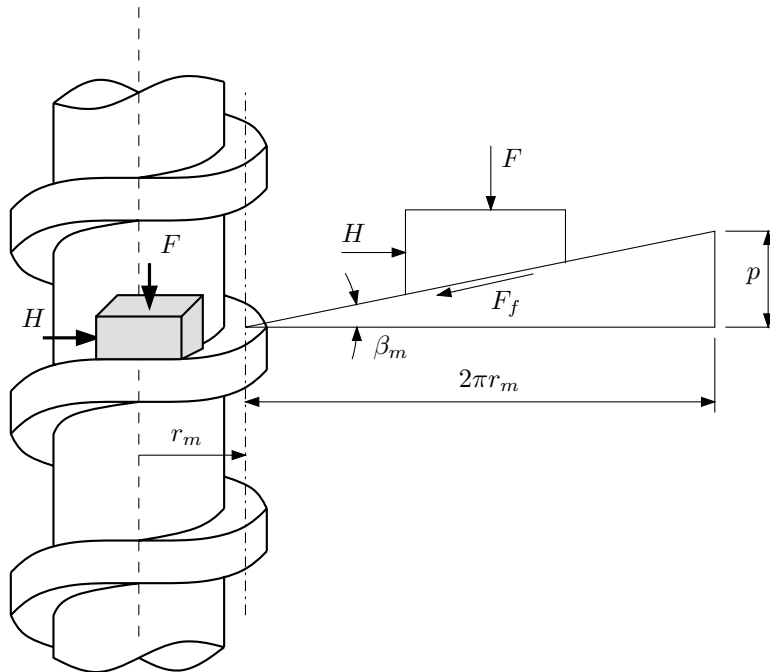
Când piulița este din material cu rezistență inferioară celei a materialului șurubului se impune verificarea *spirelor piuliței*.

#### 11.1.4 Frecarea și condiția de autofrânare

Strângerea piuliței unui șurub sub acțiunea unei forțe axiale  $F$  poate fi comparată (echivalată) cu deplasarea unui corp cu greutatea  $F$  pe un plan înclinat, al cărui unghi față de orizontală este egal cu unghiul de înclinare al spirei filetului  $\beta_m$ .

Forța  $H$  aplicată la un braț de pârghie cu lungimea  $r_m$  dă naștere momentului necesar pentru deplasarea piuliței pe șurub sub sarcina  $F$ .





Prin descompunerea forțelor  $H$  și  $F$  pe direcțiile paralelă și perpendiculară pe planul înclinat și prin luarea în considerare a frecării dintre spire se obțin următoarele relații:

$$H = F \tan(\beta_m \pm \phi') \quad (\text{semnul "+" pentru înșurubare, respectiv "-" pentru desfacere})$$

$$\text{Forța totală de frecare: } F' = F \frac{\mu}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{Momentul de înșurubare (sau desfacere): } M_t = F r_m \tan(\beta_m \pm \phi')$$

$$\text{unde } \phi' = \arctan \frac{\mu}{\cos \frac{\alpha}{2}} \text{ reprezintă unghiul de frecare}$$

$\alpha$  – unghiul la vârf al spirelor (pentru filet pătrat  $\alpha = 0^\circ$ , iar pentru filet metric  $\alpha = 60^\circ$ )

Condiția de autofrânare presupune ca piulița să nu se deplaseze de la sine în sensul desfacerii sub acțiunea forței  $F$ . Acest lucru înseamnă că trebuie să fie necesar un moment  $M_d$  de sens contrar celui pentru strângere. Această condiție presupune ca:

$$M_d = F r_m \tan(\beta_m - \phi') < 0 \quad \text{sau} \quad \beta_m < \phi'$$

### 11.1.5 Randamentul șurubului

Randamentul șurubului este definit ca raportul dintre lucrul mecanic util și lucrul mecanic consumat.

- Lucrul mecanic util:  $L_u = F \cdot p = 2\pi r_m F \tan \beta_m$

- Lucrul mecanic consumat:  $L_c = H 2\pi r_m = 2\pi r_m F \tan(\beta_m + \phi')$

Rezultă:

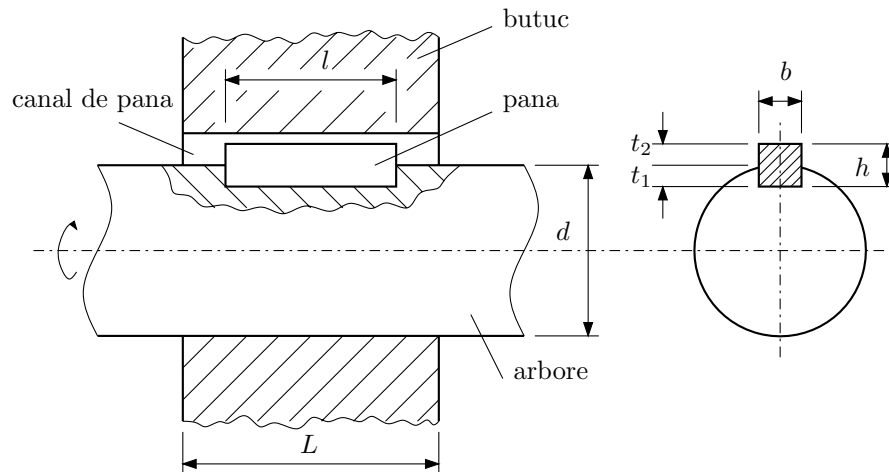
$$\eta = \frac{L_u}{L_c} = \frac{\tan \beta_m}{\tan(\beta_m + \phi')}$$

Șuruburile de strângere care trebuie să îndeplinească condiția de autofrânare au randament scăzut. În cazul șuruburilor de mișcare randamentul este important, apelându-se la filete cu unghi de înclinare a spirei mare.

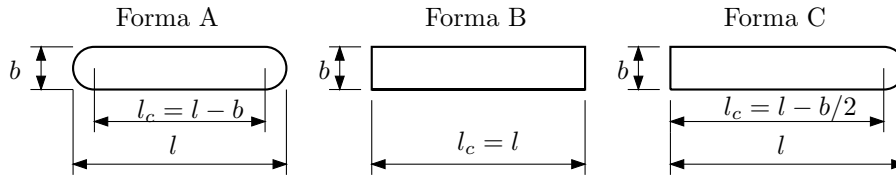
## 11.2 Asamblări arbore-butuc

Asamblările arbore-butuc sunt asamblări demontabile care au drept rol principal transmiterea unui moment de răsucire de la un arbore la un butuc sau invers. În funcție de posibilitatea deplasării axiale a butucului față de arbore, asamblările arbore-butuc pot fi asamblări mobile sau asamblări fixe.

### 11.2.1 Asamblarea cu pană paralelă



Forma constructivă a penelor este standardizată prin STAS 1004-81. Penele paralele se montează cu joc radial și permit deplasarea axială a roții (butucului) pe arbore. Constructiv, standardul STAS 1004-81 prevede trei forme de pene paralele: A, B și C.



Dacă asupra arborelui acționează un moment de răsucire  $M_t$ , pe suprafața laterală de contact dintre pană și arbore apare o tensiune de strivire  $\sigma_s$  considerată egală cu tensiunea de strivire dintre pană și butuc. De asemenea, în secțiunea mediană, a penei, apare o tensiune de forfecare  $\tau_f$ .

### Elemente de calcul

- strivire:

$$\sigma_s = \frac{F_t}{A_c} = \frac{4M_t}{dhl_c} \leq \sigma_{as}$$

- forfecare:

$$\tau_f = \frac{F_t}{A_f} = \frac{2M_t}{dbl} \leq \tau_{af} \quad (\text{pt. forma B})$$

$$\text{pt. forma A, } A_f = bl_c + \frac{\pi b^2}{4}$$

$$\text{pt. forma C, } A_f = bl_c + \frac{\pi b^2}{8}$$

### 11.2.2 Asamblarea cu caneluri

Asamblarea cu caneluri poate fi considerată ca fiind o asamblare cu pene paralele multiple, solidare cu arborele. Datorita acestui lucru, capacitatea portantă este mult mai mare decât în cazul asamblărilor cu pene paralele. Există însă și dezavantajul prețului de cost mai mare, motiv pentru care asamblarea cu caneluri este utilizată numai la asamblări greu încărcate.

Constructiv, sunt standardizate trei tipuri de caneluri: cu profil dreptunghiular, cu profil triunghiular și cu profil evolventic.

Cele mai des utilizate sunt canelurile cu profil dreptunghiular. Canelurile triunghiulare se recomandă pentru asamblările fixe și sarcini cu șoc. Canelurile în evolventă au o bună rezistență la oboseală, utilizându-se în special în domeniul auto.

### Elemente de calcul

Momentul de răsucire se transmite prin contactul dintre flancuri. Ca urmare apare o solicitare de strivire  $\sigma_s$  care este solicitarea principală din asamblare. Celelalte solicitări, forfecarea și încovoierea, pot fi neglijate.

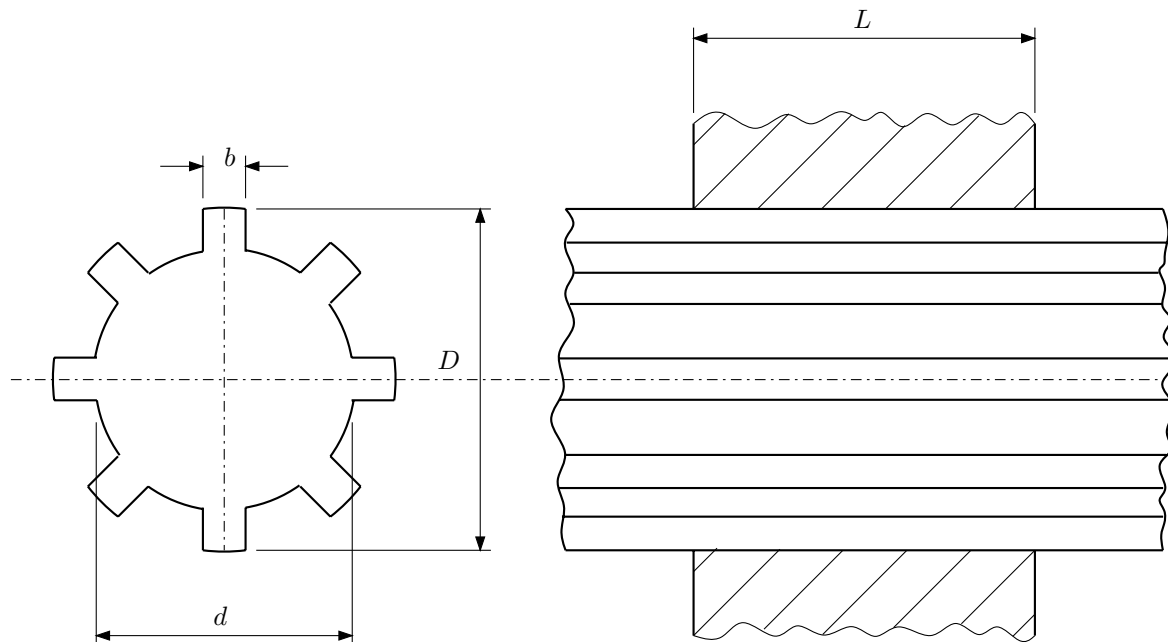


Figura 11.1: Asamblare cu caneluri

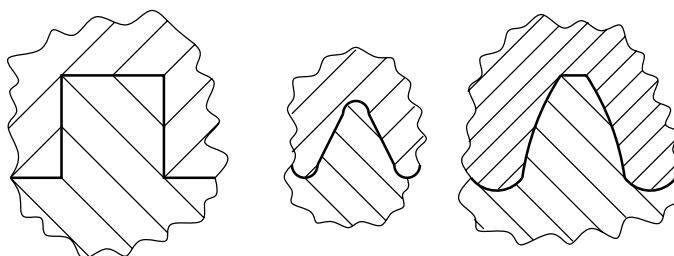


Figura 11.2: Profile standardizate de caneluri

În cazul canelurilor dreptunghiulare avem:

$$\sigma_s = \frac{F_t}{S} = \frac{\frac{4M_t}{D+d}}{kz \left( \frac{D-d}{2} - 2c \right) L} \leq \sigma_{as}$$

unde:  $k = 0,75$  – coeficient care ține cont de neuniformitatea repartiției sarcinii pe lungimea asamblării și pe numărul de caneluri;  $z$  – numărul de caneluri;  $c$  – mărimea teșiturii muchiilor canelurilor arborelui și butucului.

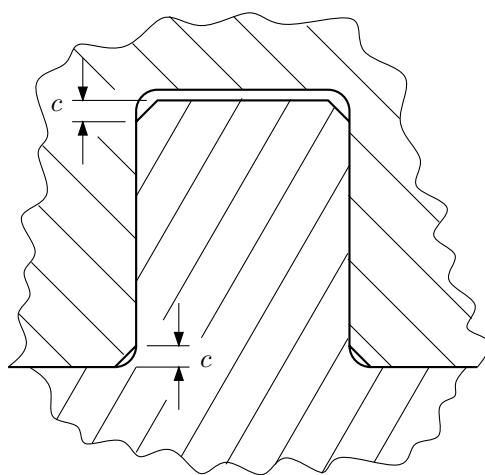


Figura 11.3: Detaliu al unei caneluri cu profil dreptunghiular ( $c$  – mărimea teșiturii)



# Capitolul 12

## Osii și arbori

### 12.1 Caracterizare. Rol funcțional

**Osiile** sunt organe de mașini care susțin alte organe în rotație ale mașinilor, agregatelor sau vehiculelor, *fără* a transmite momente de răsucire. Ele sunt sollicitate în principal la *încovoiere*.

**Arorii** sunt organe de mașini rotative în jurul axelor lor geometrice, care transmit momente de răsucire prin intermediul altor organe pe care le susțin sau cu care sunt asamblați. Datorită acestei funcții, arborii sunt solicițați în special la răsucire, dar totodată și la încovoiere.

După forma secțiunii arborii și osiile pot fi cu secțiune plină și cu secțiune inelară, în special la arborii de dimensiuni mari. După axă, arborii pot fi drepecți (cazul general al transmisiilor mecanice) sau cociți (caz caracteristic motoarelor cu ardere internă, pompelor, compresoarelor, etc).

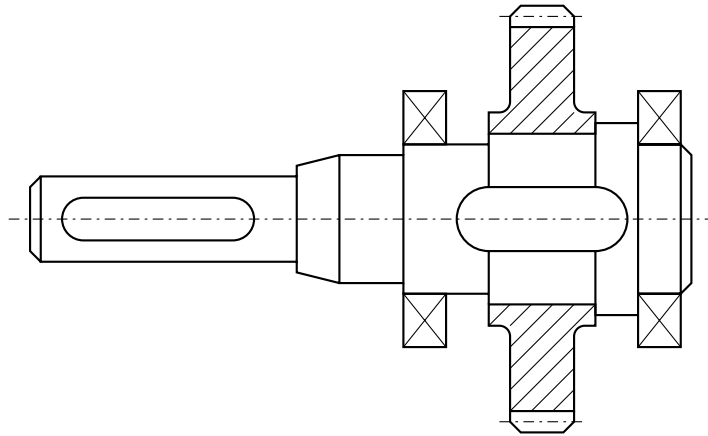


Figura 12.1: Formă tipică de arbore destinat transmisiilor mecanice

## 12.2 Materiale și tehnologie

Materialul arborilor se alege în funcție de scop și de condițiile de funcționare, dar și în funcție de tehnologia de execuție. Se utilizează în general oțeluri și fonte. Oțelurile utilizate sunt: oțeluri carbon obișnuite (OL42, OL50, OL60), oțeluri carbon de calitate (OLC25, OLC35, OLC45, OLC60), oțeluri aliate cu nichel, crom-nichel, crom-mangan, titan și oțeluri turnate. În cazul în care se utilizează fonta, se preferă fontele de înaltă rezistență.

În ceea ce privește tehnologia de fabricație, arborii și osiile se pot obține în stare de semifabricat prin următoarele procedee:

- laminate trase precis
- laminate cu forjare ulterioară
- forjare din lingouri
- matrițare
- turnare

## 12.3 Calculul arborilor drepecți

În principiu, pentru proiectarea osiilor și a arborilor se efectuează următoarea succesiune de calcule:

- I. predimensionarea, printr-un calcul simplificat;
- II. proiectarea formei, cu considerarea valorilor obținute prin predimensionare;
- III. efectuarea verificărilor (la oboseală, la vibrații, deformațiilor); În situații speciale se efectuează în plus și verificarea la solicitarea compusă.

### 12.3.1 Calculul de predimensionare

Predimensionarea arborilor se face din solicitarea de torsiune întrucât în acest stadiu nu se cunosc de regulă distanțele între reazeme.

Uzual se cunoaște momentul de torsiune  $M_t$  sau puterea de transmis  $P$  și turația arborelui  $n$ . În al doilea caz momentul se determină cu relația:

$$M_t = \frac{30}{\pi} \cdot 10^6 \frac{P[kW]}{n[rot/min]}$$



Diametrul minim al arborelui se determină cu relația:

$$d_{min} = \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi\tau_{at}}}$$

Pentru arbori solicitați în principal la răsucire se consideră  $\tau_{at} = 50 \dots 80 MPa$ , iar pentru arborii solicitați și la răsucire și la încovoiere se consideră  $\tau_{at} = 15 \dots 30 MPa$ .

Dacă în funcționare se impune o limită de deformație unghiulară  $\theta_a$ , pre-dimensionarea se va realiza din condiția:

$$\theta = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} \leq \theta_a$$

Ținând cont că  $I_p = \pi d^4 / 32$  pentru secțiuni circulare, rezultă:

$$d_{min} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_t \cdot l}{\pi G \cdot \theta_a}}$$

unde:  $l$  – lungimea arborelui,  $G$  – modulul de elasticitate transversal,  $\theta_a$  – deformația unghiulară admisibilă

### 12.3.2 Proiectarea formei

Forma arborelui se va stabili pe baza diametrelor obținute la etapa de pre-dimensionare, luând în considerare condițiile impuse de rolul funcțional, tehnologia de execuție și montaj.

### 12.3.3 Verificarea arborilor la oboseală

Verificarea la oboseală constă în determinarea coeficienților de siguranță ai arborilor supuși solicitărilor compuse de torsiune și încovoiere. Calculul coeficienților de siguranță se efectuează după metoda Soderberg.

- Pentru încovoiere:

$$C_\sigma = \frac{1}{\frac{\beta_{k\sigma}}{\epsilon_\sigma \gamma_\sigma} \frac{\sigma_v}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_c}}$$

- Pentru răsucire:

$$C_\tau = \frac{1}{\frac{\beta_{k\tau}}{\epsilon_\tau \gamma_\tau} \frac{\tau_v}{\tau_{-1}} + \frac{\tau_m}{\tau_c}}$$

- Pentru solicitare compusă:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{c_\sigma}\right)^2 + \left(\frac{1}{c_\tau}\right)^2}} = \frac{c_\sigma \cdot c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2 + c_\tau^2}}$$

unde:  $\sigma_v = (\sigma_{max} - \sigma_{min})/2$ ;  $\sigma_m = (\sigma_{max} + \sigma_{min})/2$ ;  $\tau_v = (\tau_{max} - \tau_{min})/2$ ;  $\tau_m = (\tau_{max} + \tau_{min})/2$ ;  $\sigma_{-1}$ ,  $\tau_{-1}$  – rezistențele la oboseală;  $\sigma_c$ ,  $\tau_c$  – limitele de curgere (pentru fonte se utilizează limitele de rupere);  $\beta_k$  – coeficient efectiv de concentrare a tensiunilor;  $\epsilon$  – factor dimensional;  $\gamma$  – coeficient de stare a suprafeței;

Ca valori ale coeficientului de siguranță se recomandă:

$c_{min} = 1,3$  pentru condiții de funcționare și solicitări cunoscute precis, material omogen și tehnologie adecvată;

$c_{min} = 1,5 \dots 2,5$  pentru arbori foarte importanți (turbine, nave, etc) a căror defectare poate produce accidente sau avarii grave.

### 12.3.4 Verificarea arborilor la solicitări statice compuse

Această verificare se face doar în situații speciale când în exploatare pot apare suprasarcini cu valori mult peste sarcinile nominale. În această situație, verificarea se face pentru secțiunile periculoase ale arborelui.

Mersul de calcul are următoarele etape:

- I. Se stabilește schema de forțe care solicită arborele la încovoiere și de momente de răsucire;
- II. Se determină reacțiunile în două plane (orizontal și vertical, pentru arbori orizontali, sau frontal și longitudinal, pentru arbori verticali);
- III. Se determină momentele încovoietoare date de componentele forțelor în planele considerate și se trasează linia de variație a lor de-a lungul arborelui;
- IV. Se calculează momentul încovoiitor rezultat  $M_i$  prin compunerea componentelor  $M_{i_{orizontal}}$  și  $M_{i_{vertical}}$  din cele două plane:  $M_i = \sqrt{M_{io}^2 + M_{iv}^2}$ ;
- V. Se trasează curba de variație a momentelor de răsucire de-a lungul arborelui;

- VI. Se determină momentul redus sau echivalent cu considerarea momentelor încovoietoare și de răsucire în fiecare punct:  $M_{red} = \sqrt{M_i^2 + \alpha M_t^2}$ , unde  $\alpha$  este un coeficient care ține seama de influența modului de variație diferit al tensiunilor de încovoiere și răsucire. Pentru încovoiere variabilă după un ciclu alternant-simetric și răsucire variabilă după un ciclu pulsator,  $\alpha \approx 0,6$ ; pentru ambele solicitări variabile după un ciclu alternant-simetric,  $\alpha = 1$ .