

3. ARBORI SI OSII

Arborii sunt organe de masini simple aflate în miscare de rotatie, solidarizate cu piesele montate pe acestea (roti, volanti) si care se sprijina prin intermediul lagarelor pe structuri relativ fixe (sasiuri, batiuri, carcase).

Tronsoanele arborilor care se sprijina pe lagare de rostogolire (rulmenti) sau pe cuzinetii lagarelor cu alunecare cu ungere mixta sau fluida se numesc fusuri.

Arborii sunt solicitati la torsiune si la încovoiere, spre deosebire de osii care au doar solicitarea de încovoiere.

Osiile pot fi fixe sau rotitoare. În primul caz roțile aflate pe osii se rotesc în raport cu acestea, iar în al doilea caz osiile se rotesc împreuna cu roțile cu care sunt solidarizate.

În Tabelul 3.1 sunt prezentate criteriile de clasificare si categoriile de arbori si de osii.

Tabelul 3.1

Criterii de clasificare	Categorii
Dupa forma axei geometrice	Arbori si osii cu axa dreapta
	Arbori si osii cu axa curba
	Arbori si osii cu axa frânta (arbori cotiti)
Dupa variatia sectiunii	Arbori si osii de sectiune constanta
	Arbori si osii de sectiune variabila (cazul cel mai frecvent)
Dupa forma sectiunii	Arbori si osii cu sectiune circulara plina
	Arbori si osii cu sectiune inelara

3.1 Materiale

Materialele pentru arbori si osii trebuie sa îndeplineasca urmatoarele conditii:

- rezistenta mecanica ridicata;
- modul de elasticitate ridicat, pentru ca deformatiile flexionale si torsionale sa fie cât mai mici si vibratiile sa aiba amplitudine redusa;
- prelucrabilitate buna si cost redus.

Pentru solicitari usoare sunt utilizate oțeluri carbon obisnuite de rezistenta ridicata (OL 50, OL 60), pentru ca asigura o mare rigiditate arborilor si osilor si prezinta avantajul costului minim.

Pentru solicitari medii sunt recomandate oțelurile de calitate OLC 35, OLC 45, OLC 50 îmbunatatite, având avantajul tehnologicitatii superioare; în plus, prin tratamente termice de calire si revenire joasa se poate obtine o rezistenta ridicata la rupere (de peste 800 MPa) si, simultan, se mareste duritatea superficiala a fusurilor.

Pentru solicitari importante se recomanda oțeluri aliate, ca de exemplu: 30Mn16, 33MoCrNi11, 31MoCr11 îmbunatatite.

Atunci când fusurile trebuie durificate si rectificate întreg arborele se realizeaza din OLC15, 18MnCr10 sau 18MoCrNi13.

Arborii de forma complicata (arborii cotiti, de exemplu) se realizeaza din oțeluri turnate sau din fonte cu grafit nodular, de mare rezistenta.

Avantajul utilizarii fontelor rezulta din urmatoarele:

- sunt mai putin sensibile la efectul concentratorilor de tensiuni;

- amortizeaza mai bine vibratiile;
- sunt mai apte decât otelurile sa preia abateri de forma (de coaxialitate, de exemplu).

3.2 Calculul osiilor

În figura 3.1 este reprezentat ansamblul cuprinzând osia unui vehicul, inclusiv lagarele care permit realizarea miscarii relative. Evident ca exista osii fixe, ca în cazul mentionat, dar exista si osii rotitoare în jurul axei proprii (figura 3.2).

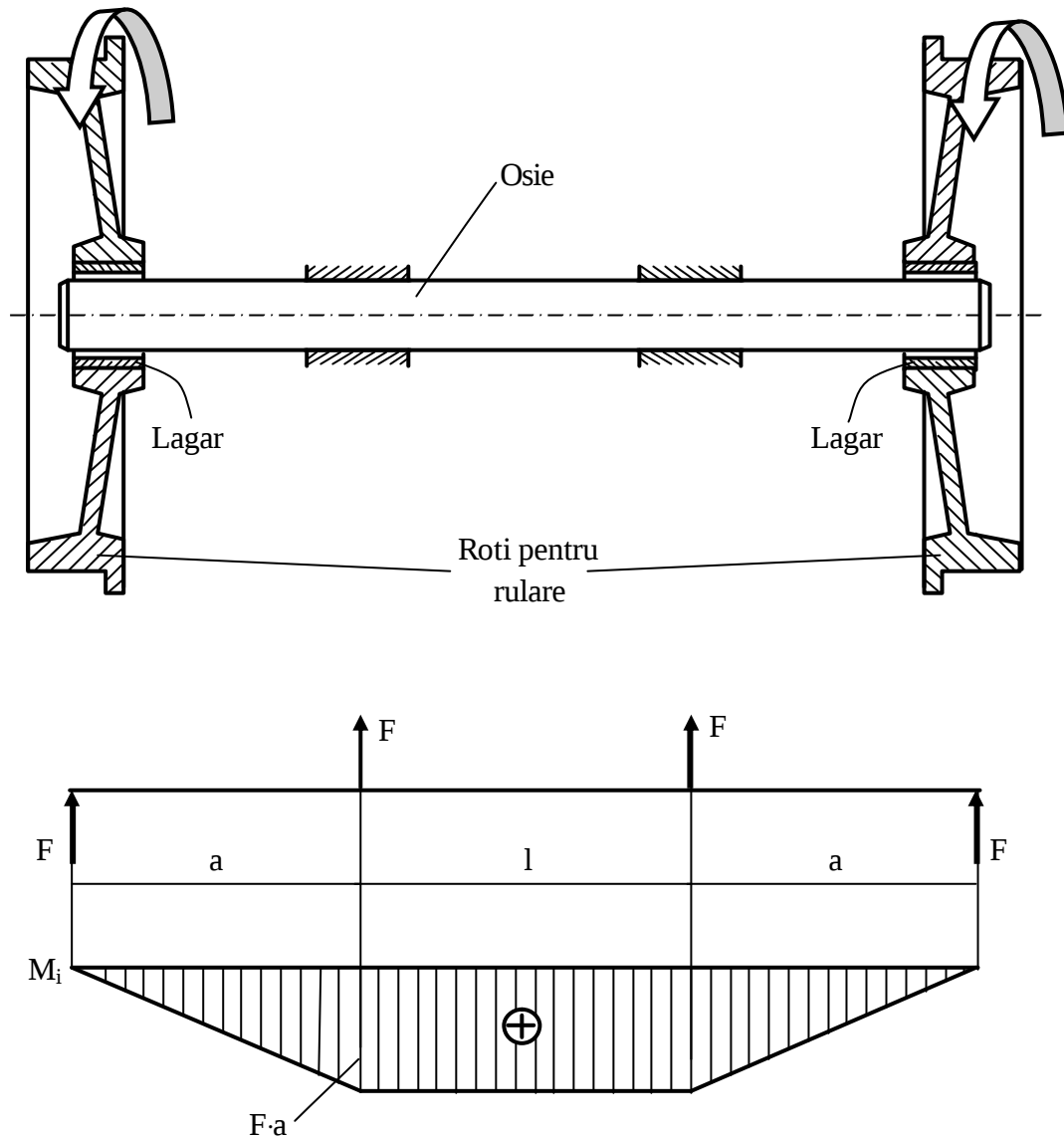


Figura 3.1

Se admite ipoteza ca osia din figura 3.1 este încărcată cu două forțe concentrată F .

Ca urmare, pe baza diagramei de momente încovoietoare, se poate calcula tensiunea maximă cu relația

$$\sigma = \frac{F \cdot a}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}} \leq \sigma_{ai} \quad (3.1)$$

Punând condiția ca tensiunea de încovoiere să atingă tensiunea admisibilă, relația de mai sus devine relație de dimensionare, pentru secțiunea cea mai solicitată aflată în trosonul central.

Pentru secțiunea de încastrare a fusului, dimensionarea se face în aceleași condiții, ținând cont de valoarea locală a momentului de încovoiere.

După dimensionarea fusului la încovoiere, urmează verificarea la strivire și verificarea puterii specifice pierdute prin frecare (produsul presiune-viteză: $p \cdot v$), așa-numită verificare la "încalzire" [1].

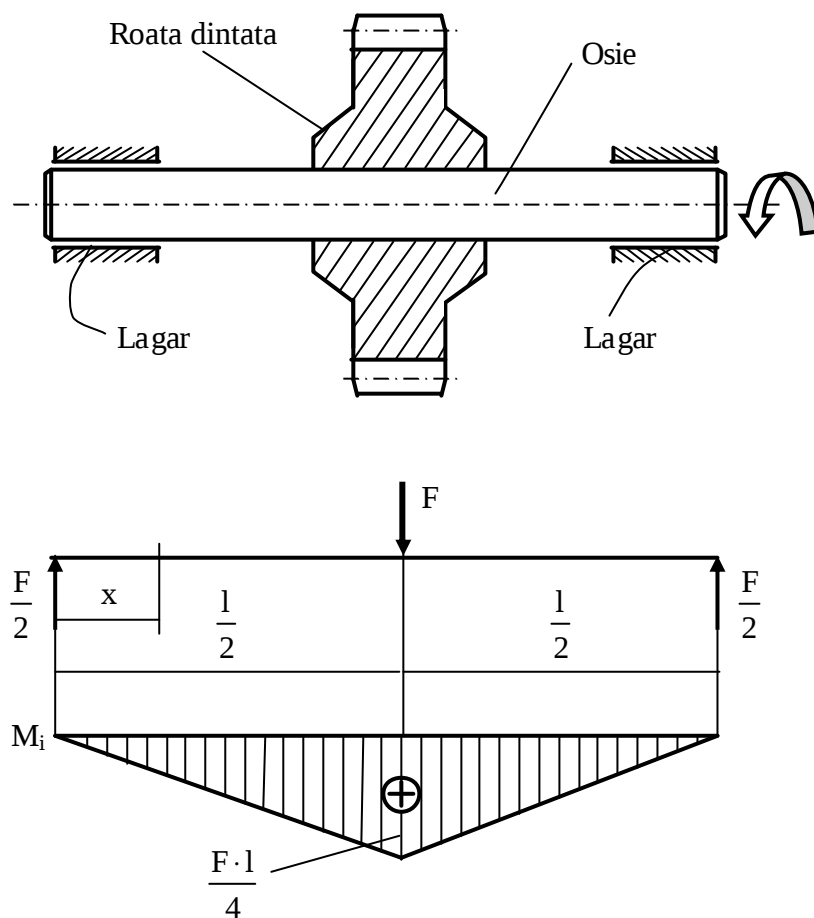


Figura 3.2

Pentru osia reprezentată în figura 3.2 pentru care s-a adoptat ipoteza încărcării cu o singură forță concentrată, se poate pune condiția de egală rezistență pentru secțiunea centrală cu diametrul d (cu solicitare maximă) și o secțiune oarecare de diametrul d_x

$$\frac{\frac{F}{2} \cdot \frac{l}{2}}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}} = \frac{\frac{F}{2} \cdot x}{\frac{\pi \cdot d_x^3}{32}} \quad (3.2)$$

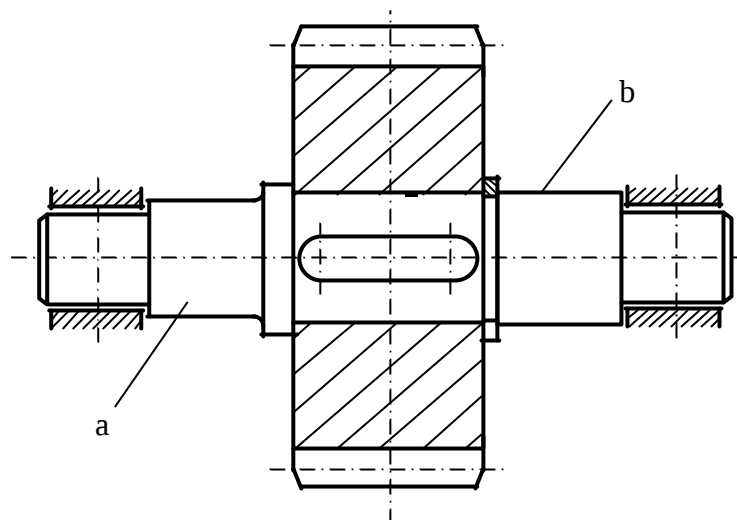


Figura 3.3

Rezulta legea de variatie a diametrului osiei:

$$d_x = d \cdot \sqrt[3]{\frac{2 \cdot x}{l}} \quad (3.3)$$

Funcția astfel obținută este caracteristica osiei de egală rezistență reprezentată în figura 3.3.a). Întrucât această formă este greu de obținut tehnologic și inutilizabilă practic, osiile, și prin extindere arborii, se realizează în trepte (fig. 3.3.b).

3.3 Calculul arborilor

3.3.1 Predimensionarea la solicitarea de răsucire

Pentru determinarea momentului de răsucire care se transmite prin arbore se pleacă de la una dintre relațiile cunoscute:

$$\begin{aligned} M_t &= F_{t1} \cdot \frac{D_1}{2}; \quad M_t = F_{t2} \cdot \frac{D_2}{2} \\ M_t &= 9,55 \cdot 10^6 \cdot \frac{P}{n} \end{aligned} \quad (3.4)$$

în care D_1 și D_2 sunt diametrele roților montate pe arbore.

Urmează determinarea diametrului arborelui într-o secțiune în care există atât solicitarea de torsiune cât și cea de încovoiere:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot \tau_{at}}} \quad (3.5)$$

Pentru ca arborele este solicitat și la încovoiere, iar dimensiunile longitudinale ale acestuia nu sunt cunoscute în această fază a dimensionării, predimensionarea la torsiune se face adoptând o valoare foarte mică pentru tensiunea admisibilă, astfel: $\tau_{at} = 15 \dots 30 \text{ MPa}$.

3.3.2 Predimensionarea la deformatie torsionala

Arborii sistemelor tehnice de precizie (arbori pentru masini-unelte, arbori cu came, arbori de comanda etc.) trebuie sa aiba deformatii torsionale cât mai mici, strict controlate. Ca urmare, determinarea diametrului acestor arbori se face punând conditia nedepasirii unghiului de rasucire admisibil θ_a , astfel:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_t \cdot l}{\pi \cdot G \cdot \theta_a}} \quad (3.6)$$

$$\theta_a = \left(\frac{1}{4} \dots \frac{1}{2} \right) \text{‰} \rightarrow \text{pentru arbori obisnuiti}$$

$$\theta_a = 5 \text{ ‰} \rightarrow \text{pentru arbori de masini-unelte.}$$

3.3.3 Proiectarea constructiva

Predimensionarea tronsoanelor intermediare poate fi facuta constructiv, tinând cont de necesitatile de montaj. În figura 3.4 este reprezentat un arbore cu doua roti dintate rezemat pe doua lagare de capat. Dupa cum s-a aratat, s-a determinat initial diametrul d pentru sectiunea cea mai solicitata (tronsonul central, în exemplul luat).

Urmeaza, apoi, faza proiectarii constructive, adica stabilirea diametrelor pentru toate tronsoanele arborelui, pornind de la constatarea ca momentul de încovoiere scade dinspre tronsonul central spre capete, ceea ce înseamna ca solicitarea compusa (încovoiere si torsiune) scade, de asemenea.

Proiectarea constructiva înseamna si proiectarea canalelor de pana, a degajarilor si altor forme care permit pozitionarea rotilor dintate si a lagarelor.

3.3.4 Calculul de verificare la solicitare compusa

Pentru arbori de turatie redusa, este suficienta verificarea la solicitare compusa, adica încovoierea si rasucirea, folosind una dintre teoriile de rezistenta pentru compunerea de eforturi, pentru aflarea tensiunii echivalente σ_{ech} .

Se calculeaza si se traseaza diagrama momentului de rasucire si diagramele momentelor de încovoiere în plan vertical si în plan orizontal, ca în exemplul din figura 3.4.

Se calculeaza, apoi, pentru fiecare sectiune momentul echivalent cu o relatie preluata din teoria a III-a de rezistenta, astfel:

$$M_{ech} = \sqrt{M_{itot}^2 + (\alpha \cdot M_t)^2}; \quad M_{itot} = \sqrt{M_{iV}^2 + M_{iH}^2} \quad (3.7)$$

Relatia 3.7 include factorul de corectie α care tine cont de faptul ca momentul de încovoiere se produce dupa un ciclu alternant simetric (indice III) – asa cum este sugerat în figura 3.5, iar momentul de torsiune este constant (indice I) sau pulsatoriu (indice II). Ca urmare, $\alpha < 1$ având în vedere ca cele doua solicitari au cicluri diferite.

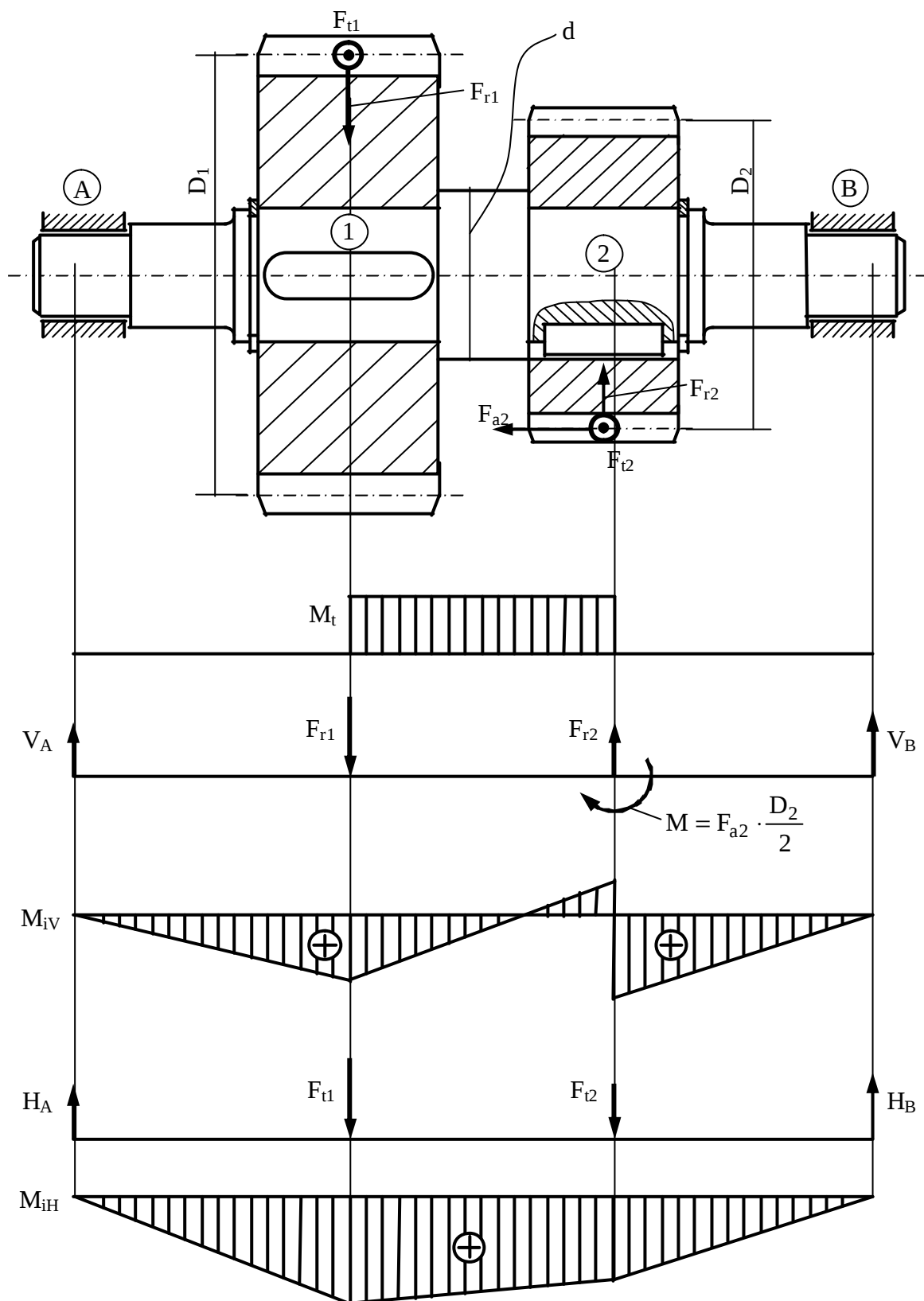


Figura 3.4

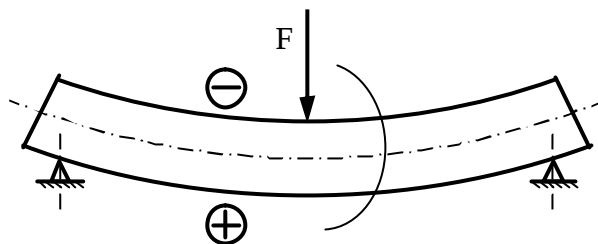


Figura 3.5

Se definește factorul de corectie:

$$\alpha = \frac{\sigma_{ai III}}{\sigma_{ai I, II}} \quad \begin{array}{l} \text{ciclul încovoierii} \\ \text{ciclul torsiunii} \end{array} \quad (3.8)$$

Urmează verificarea la solicitare compusă:

$$\sigma_{ech} = \frac{32 \cdot M_{ech}}{\pi \cdot d^3} \leq \sigma_{ai III} \quad (3.9)$$

3.3.5 Calculul de verificare la oboseala

Pentru arbori de turatie medie sau ridicata, de peste 600 rot/min, verificarea la oboseala se face în toate sectiunile cu concentratori de tensiune (salturi de diametru, canale de pana, degajari etc.).

Pentru sectiunea de calcul aleasa, se determina momentul de încovoiere total, pe baza caruia se calculează tensiunea de încovoiere maxima – ca amplitudine a ciclului alternant simetric – s_v . Tensiunea de încovoiere medie s_m este nula.

Corespunzător ciclului de variație al momentului de torsiune, de exemplu pentru ciclul pulsator, se determina tensiunile t_{max} , t_v și t_m .

În final, se calculează coeficientii de siguranta la oboseala pentru solicitarea de încovoiere c_s , respectiv de torsiune c_t . Coeficientul de siguranta echivalent – c se compara cu valorarea admisibila c_a .

$$\sigma_v = \sigma_{i max} = \frac{32 \cdot M_{i max (total)}}{\pi \cdot d^3}; \quad \sigma_m = 0 \quad (3.10)$$

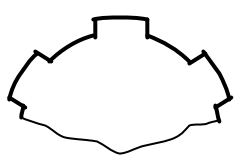
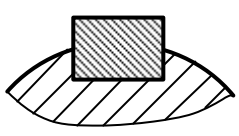
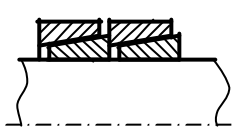
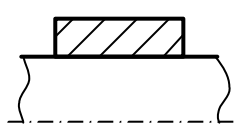
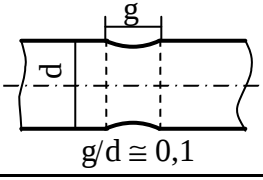
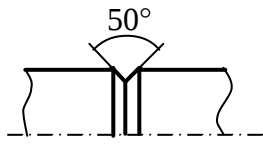
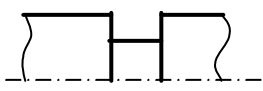
$$\tau_v = \tau_m = \frac{\tau_{max}}{2}; \quad \tau_{max} = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot d^3} \quad (3.11)$$

$$c_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{\beta_{K\sigma}}{\epsilon_\sigma \cdot \gamma} \cdot \sigma_v}; \quad c_\tau = \frac{1}{\frac{\beta_{K\tau}}{\epsilon_\tau \cdot \gamma} \cdot \frac{\tau_v}{\tau_{-1}} + \frac{\tau_m}{\tau_c}} \quad (3.12)$$

$$c = \frac{c_\sigma \cdot c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2 + c_\tau^2}} \geq c_a = 1,5 \dots 2,5 \quad (3.13)$$

Câteva dintre coeficientii concentratorilor de tensiuni sunt prezentati în Tabelul 3.2.

Tabelul 3.2

Concentratorul de tensiuni	Reprezentarea grafica	b_{ks}	b_{kt}
Caneluri triunghiulare		1,4	3
Caneluri dreptunghiulare		1,3	1,5 ... 2,7
Canal pentru pana paralela		1,7 (freza disc) 2,5 (freza deget)	1,9
Strângerea cu pene inelare		1,8	1,2
Butuc presat		1,7 ... 2	1,5
Gaura transversala		1,7	2,5
Crestatura inelara		2,5	—
Canal inelar		2,2	1,8

3.3.6 Soluții constructive pentru micșorarea concentratorilor de tensiune

În figura 3.6.a - i sunt prezentate câteva soluții pentru micșorarea concentratorilor de tensiune dați de prezența saltului de diametru, soluții care permit cu ușurință montarea roților pe arbori.

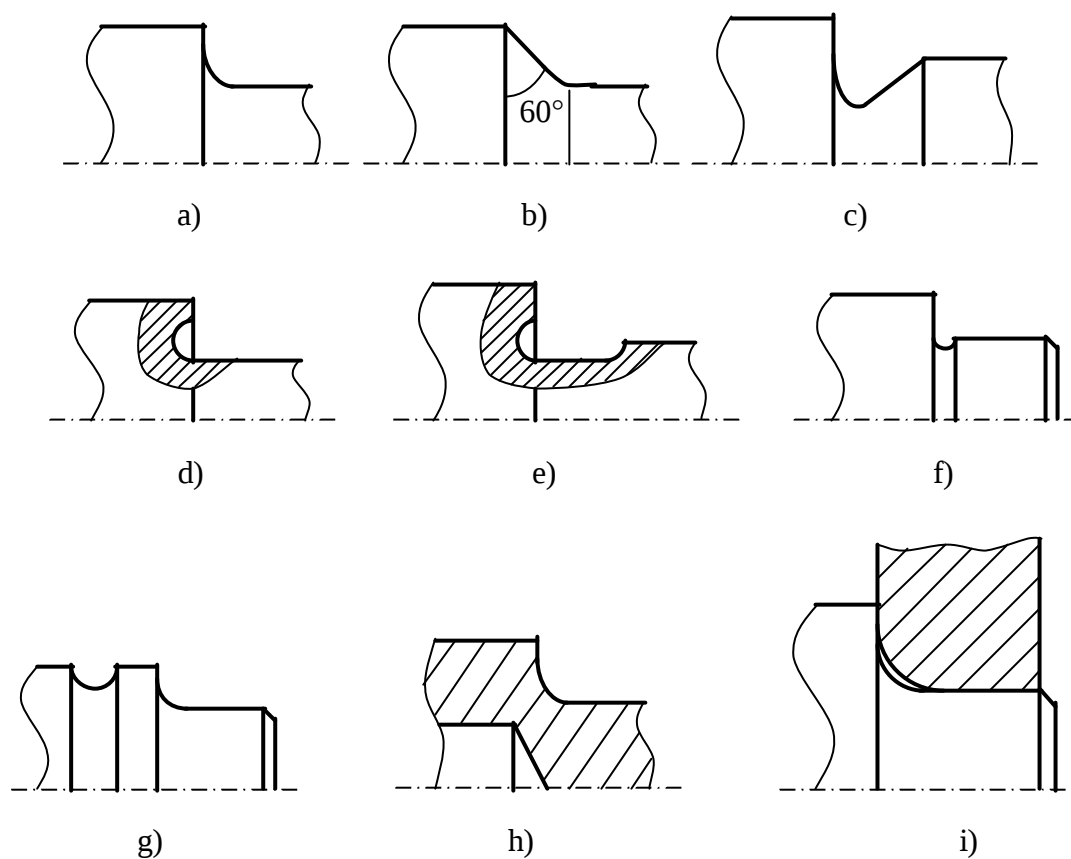


Figura 3.6

În figurile 3.7 ... 3.10 sunt prezentate soluții pentru diminuarea efectului concentratorului de tensiuni dat de strângerea dintre butuc și arbore.

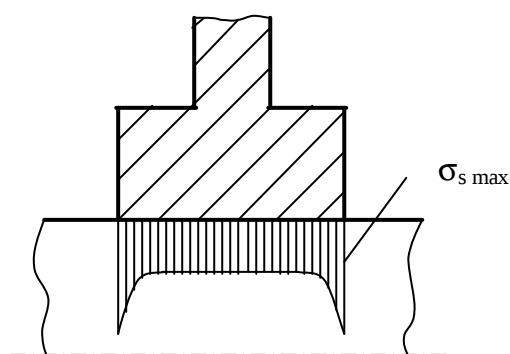


Figura 3.7

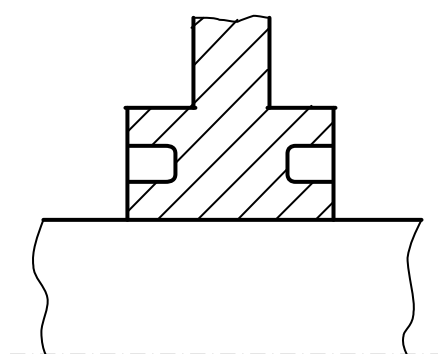


Figura 3.8

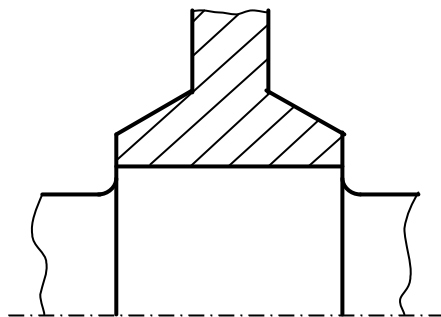


Figura 3.9

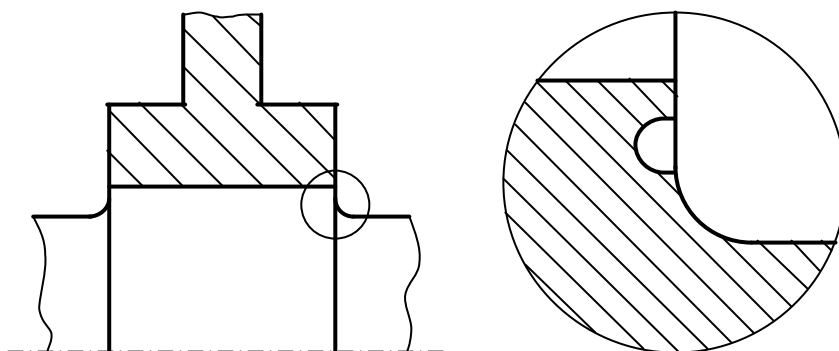


Figura 3.10

3.3.7 Calculul la deformatii elastice torsionale

Cunoscând valorile admisibile pentru unghiul de rasucire φ_a (vezi paragraful 3.3.2), pe baza diagramei momentului de rasucire ca, de exemplu, cea prezentata în figura 3.11 se calculeaza unghiul efectiv φ care se compara cu valoarea admisibila impusa de necesitati functionale.

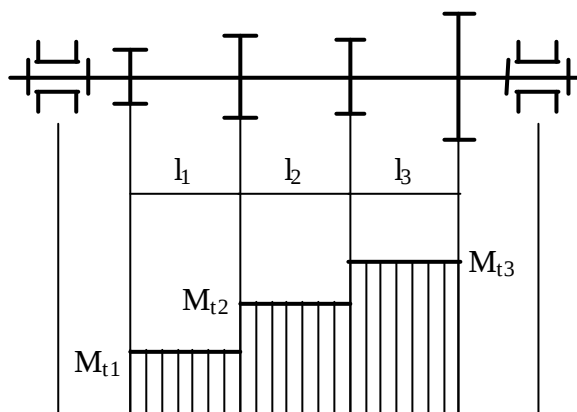


Figura 3.11

$$\theta = \frac{1}{G} \cdot \left(\frac{M_{t1} \cdot l_1}{I_{p1}} + \frac{M_{t2} \cdot l_2}{I_{p2}} + \dots \right) \quad (3.14)$$

3.3.8 Calculul la deformatii elastice flexionale

Majoritatea arborilor trebuie dimensionati astfel încât sa nu se deformeze sub actiunea sarcinilor transversale mai mult decât limitele acceptate de functionalitatea ansamblului din care face parte arborele respectiv.

Prin metodele cunoscute din rezistenta materialelor, în functie de încărcare si de rezemare se determina sageata maxima pe care o are arborele în sectiunile în care sunt montate roți dintate sau alte organe de masini care sunt sensibile la deplasari transversale. Valorile obtinute se compara, apoi, cu sagetile admisibile f_a .

$$f_a \leq \left(\frac{2}{10^5} \dots \frac{3}{10^5} \right) \cdot l, \text{ unde } l \text{ este distanta dintre reazeme}$$

De asemenea, se calculeaza unghiul de rotire în reazeme φ care se compara cu valoarea admisibila:

$$\varphi_a \leq 0,001 \text{ rad}$$

3.3.9 Calculul la vibratii flexionale

Se ia în considerare, pentru exemplificare, un arbore de sectiune constanta cu reazeme simple la capete (reazeme libere, articulatii sau încastrari) ca în figura 3.12.

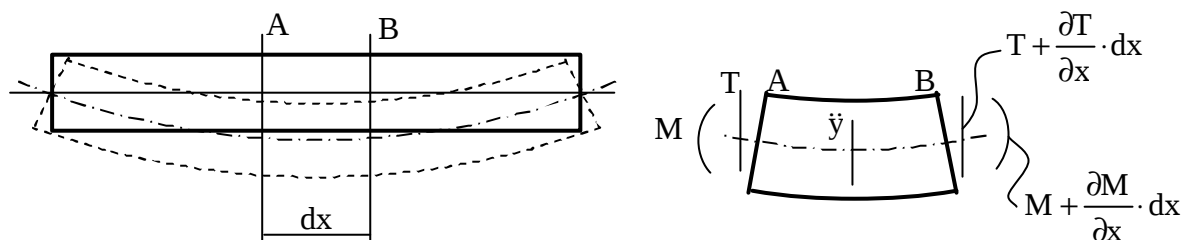


Figura 3.12

Aplicând principiile lui D'Alembert:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \cdot dx + F_i = 0 \quad (3.15)$$

$$T = \frac{\partial M(x)}{\partial x}; \quad F_i = -A \cdot dx \cdot \rho \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (3.16)$$

Întroducând pe (3.16) în (3.15) rezulta

$$\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} = \rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (3.17)$$

Folosind ecuatia fibrei medii deformate:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{M(x)}{E \cdot I_{zz}} \quad (3.18)$$

Rezulta prin integrare

$$M(x) = -E \cdot I_{zz} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3.19)$$

si înlocuind în (3.17) se obtine

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot \left[E \cdot I_{zz} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = \rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (3.20)$$

Solutia ecuatiei este $y(x, t) = X(x) \cdot \cos(\omega_n \cdot t + \theta)$ care, înlocuita în (3.20), conduce la

$$\frac{d^4 X}{dx^4} = k^4 \cdot X \quad (3.21)$$

în care

$$k^4 = \frac{\rho \cdot A}{E \cdot I_{zz}} \cdot \omega_n^2 \quad (3.22)$$

Solutia ecuatiei (3.22) este:

$$X = A \cdot [\cos(k \cdot x) + \operatorname{ch}(k \cdot x)] + B \cdot [\cos(k \cdot x) - \operatorname{ch}(k \cdot x)] + \\ + C \cdot [\sin(k \cdot x) + \operatorname{sh}(k \cdot x)] + D \cdot [\sin(k \cdot x) - \operatorname{sh}(k \cdot x)]$$

Pentru determinarea constantelor A, B, C si D se cunosc:

- sageata este proportionala cu X si este nula pe reazeme;
- rotirea este proportionala cu X' si nula pe reazemul încastrat;
- momentul încovoietor este proportional cu X'' si este nul pe capatul liber sau articulat;
- forta taietoare este proportionala cu X''' si este nula pe capatul liber.

Pentru conditii la limita obisnuite, doua dintre constante sunt nule, ramânând în discutie doua ecuatii omogene cu doua constante. Din conditia de existenta a unor solutii diferite de cea nula se obtine *ecuatia pulsatiilor* având necunoscuta marimea k. Dupa rezolvare, se introduce k în relatia (3.22) si se determina valorile frecventelor proprii

$$\omega_n = k^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_{zz}}{\rho \cdot A}} \quad (3.23)$$

Arborii pot functiona în regimuri cu frecvente subcritice sau supracritice, trecerea prin frecventele de rezonanta facându-se în timp foarte scurt.

3.3.10 Vibratiile flexionale ale unui arbore vertical fara masa proprie solidar cu un disc cu masa excentrica

Conform figurii 3.13, discul de masa m este montat accidental excentric – cu excentricitatea e . Forta centrifuga duce la aparitia sagetii dinamice f_{din} care este echilibrata de forta elastica.

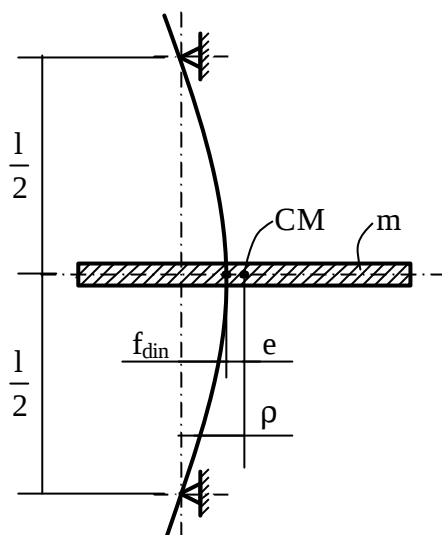


Figura 3.13

$$F_{cf} = m \cdot \omega^2 \cdot \rho = m \cdot \omega^2 \cdot (f_{din} + e) \quad (3.24)$$

$$F_{el} = c \cdot f_{din}; \quad c = \frac{48 \cdot E \cdot I}{l^3} \quad (3.25)$$

în care c este rigiditatea flexională.

Egalând F_{cf} cu F_{el} , rezulta:

$$f_{din} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot e}{c - m \cdot \omega^2} \quad (3.26)$$

Atunci când $f_{din} \rightarrow \infty$; $\omega = \omega_{cr}$

Pulsatia critica este, deci, la rezonanta:

$$\omega_{cr} = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (3.27)$$

Reprezentarea din figura 3.14 pune în evidenta faptul ca, pentru arborii rigizi, săgeata dinamica relativa creste odata cu cresterea turatiei, iar pentru arborii elastici aceasta scade cu cresterea turatiei, pâna la valoarea $f_{din} = e$.

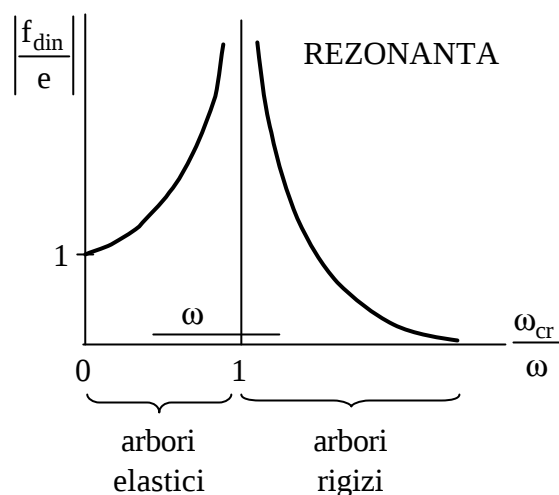


Figura 3.14

Atunci când $\left| \frac{f_{din}}{e} \right| = 1$, se produce autocentrarea.

Pentru a se evita fenomenul de rezonanta se recomanda ca $1,2 \leq \frac{\omega}{\omega_{cr}} \leq 0,8$.

Observatii care permit completarea celor deja prezentate:

1. Arborele are de obicei masa, uneori distribuita excentric;
2. Sageata dinamica apare chiar daca arborele este orizontal;
3. Daca masa m nu este concentrata în planul de simetrie transversal al discului apar si vibratii în raport cu alte axe;
4. Rezemarea influenteaza frecventa critica;
5. Turatia critica nu depinde de excentricitate;
6. Sageata dinamica depinde de excentricitate.

Pentru arbori orizontali, turatia critica se determina cu relatia:

$$n_{cr} = \frac{30}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{f_{static}}} \quad (3.28)$$

3.3.11 Aspecte constructive privind arborii

Capetele de arbori sunt standardizate: STAS 8724/1-71, STAS 8724/2-71, STAS 8724/4-71 (capete cilindrice) si STAS 8724/3-71 (capete conice).

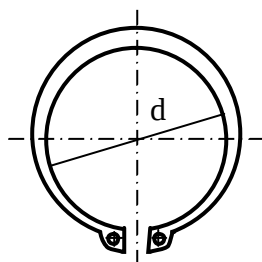


Figura 3.15

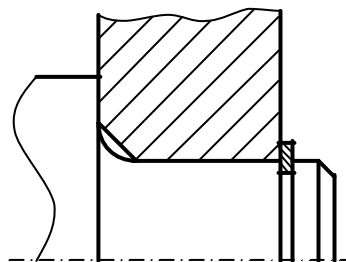


Figura 3.16

Gaurile de centrare care se practica la capetele arborilor au menirea de a asigura precizia la strunjire, dar si la rectificarea fusurilor sunt standardizate prin: STAS 1361-82 (gauri nefiletate) si SR ISO 8189-1995 (gauri filetate).

Inele elastice (STAS 5848/2-88) din figura 3.15 sunt folosite pentru fixarea axiala a rotilor, ca în reprezentarea din figura 3.16.

Exista doua tipuri de inele elastice: inele elastice pentru arbori si inele elastice pentru alezaje.

3.4 Bibliografie

1. Pavelescu, D., Radulescu, Gh., Gafitanu, M., Gheorghiu, N., Organe de masini, Editura didactica si pedagogica, Bucuresti, 1985.
2. Manolescu, N., Andrian, A., Costinescu, V., Manualul inginerului mecanic, Editura tehnica, Bucuresti, 1976.
3. Manea, Gh., Organe de masini, Vol. I, Editura Tehnica, Bucuresti, 1970.
4. Decker, K. H., Maschinenenelemente, Carl Hanser Verlag München Wien, 1997.
5. Shigley, J. E., Mechanical Engineering Design, McGraw-Hill Book Company, New York, 1986.
6. Mladinescu, T., Rizescu, E., Weinberg, H., Organe de masini si mecanisme, Editura didactica si pedagogica, Bucuresti, 1972.
7. Buzdugan, Gh., Rezistenta materialelor, Editura Academiei Române, Bucuresti, 1986.
8. Filipoiu, I. D., Raseev, M., Voica, I., Organe de masini, Vol. I, Universitatea "POLITEHNICA" Bucuresti, 1994.