

Universitatea POLITEHNICA din BUCUREȘTI
CENTRUL DE EXCELENȚĂ ÎN INGINERIE MECANICĂ ȘI TRIBOLOGIE
(CESIT)

Contract CNCSIS **IDEI 98/01.10.2007**

Cod UPB ME14/07/05

Cod CNCSIS 912

**PROCESE DE LUBRIFICATIE IN STRATURI POROASE,
FOARTE COMPRESIBILE, SUPUSE LA SARCINI DE IMPACT**

Faza 2007

**Studiul teoretic al amortizării în condiții XPHD, sub impact/șoc
pentru suprafețe circulare plane, în condiții axial-simetrice.**

SINTEZĂ

Director

Prof. dr. ing. Mircea D. PASCOVICI

Echipa de cercetare

Prof. dr. ing. Traian CICONI

As. dr. ing. Victor MARIAN

Drd. ing. Christian RUSSU

Drd. ing. Cristian Sorin POPESCU

1. PREAMBUL

Prezentul Grant are ca obiectiv aprofundarea studiilor **lubrificației ex-poro-hidrodinamice (XPHD)** în condiții de **încărcare prin impact/șoc**. Acest mecanism original de lubrificație autoportantă care are loc în medii extrem de compresibile și poroase, îmbibate cu un fluid/lubrifiant a fost sesizat și analizat, în mod independent, de profesorul Pascovici de la UPB și profesorul Weinbaum de la City University din New York. **În esență, este vorba de curgeri într-un mediu poros a cărui fază solidă, reprezentată de fibre¹, induce forțe elastice de compresiune neglijabile, în comparație cu forțele de presiune hidrodinamice generate în interiorul mediului (stratului) poros.** La baza explicației fenomenului XPHD stă următoarea succesiune de corelații: variația grosimii stratului în spațiu sau timp, conduce la variația porozității și deci a permeabilității, lucru ce conduce în final la apariția câmpului de presiuni staționar, sau variabil în timp.

Printre aplicațiile întrevăzute până acum se enumără: pompe de viscozitate [1], lagăre axiale [3], circulația eritrocitelor în microcapilare [5], [6], articulațiile umane naturale sau protezate [10], [11], schiatul pe zăpadă afânată [2], trenurile de mare viteză [4].

Pentru faza curentă (2007) activitățile de cercetare au avut un caracter strict teoretic, având ca obiectiv central „*Studiul teoretic al amortizării în condiții XPHD, sub impact/șoc pentru suprafețe circulare plane, în condiții axial-simetrice*”. Pe parcursul activităților s-au extins modelele analitice și numerice de la suprafețele circulare și la suprafețele plane dreptunghiulare. Prezentul material sintetizează în primul Capitol modelele analitice propuse și analizează rezultatele obținute cu acestea. Capitolul 2 este dedicat abordării numerice, cu metoda diferențelor finite, a problemei expulzării prin șoc. Capitolul 3 prezintă rezultatele evaluării capabilităților software-ului comercial FLUENT în tratarea problematicii lubrificației prin dislocație în medii poroase.

1. CALCULUL ANALITIC AL PROCESULUI DE EXPULZARE ÎN STRATURI POROASE, FOARTE COMPRESIBILE

S-a analizat procesul de expulzare în straturi poroase relativ subțiri, foarte compresibile. Succesiv, au fost abordate în condiții similare, următoarele configurații ale corpului rigid în mișcare de apropiere normală (Fig 1):

- 1) circulare cu condiții la limită extinse
- 2) circulare cu condiții la limită restrânse
- 3) rectangulare cu condiții la limită restrânse

1.1. Procesul de expulzare prin impact în straturi poroase foarte compresibile, pentru contacte de configurație circulară.

În Fig. 1 este prezentată schematic esența procesului de expulzare a lubrifiantului, îmbibat într-un strat poros deformabil, de grosime inițială h_0 , printr-un impact (șoc) produs de o masă M , care cade de la o înălțime H_f , peste un corp circular rigid cu rază exterioară R , de masă neglijabilă.

Se conaideră că încărcarea corpului circular este axial-simetrică. În consecință, grosimea instantanee a stratului poros deformat, h , este uniformă pe toată suprafața de contact. Consecvent cu ipotezele utilizate în lucrările anterioare [3], [10], se presupune că variația permeabilității stratului poros, ϕ , la variația compactității, σ , sau a porozității, ε , induse de variația grosimii, h , în timpul impactului ascultă de legea Kozeny-Carman [7]:

$$\phi = \frac{D(1-\sigma)^3}{\sigma^2} = \frac{D\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)^2} \quad (1)$$

unde $D = d^2/16k$ iar $k = 5 \div 10$ este o constantă.

De asemenea, se consideră că „partea solidă” a materialului rămâne constantă la variația grosimii lui:

$$\sigma h = \sigma_0 h_0 \quad (2)$$

¹ de ex. materiale textile neșesute, de tipul pâslei sau a lavetelor; zăpada proaspăt căzută; puful păsărilor; straturile endotheliale de glycocalyx ce căptușesc vasele sanguine, în special capilarele; cartilajul articular; etc.

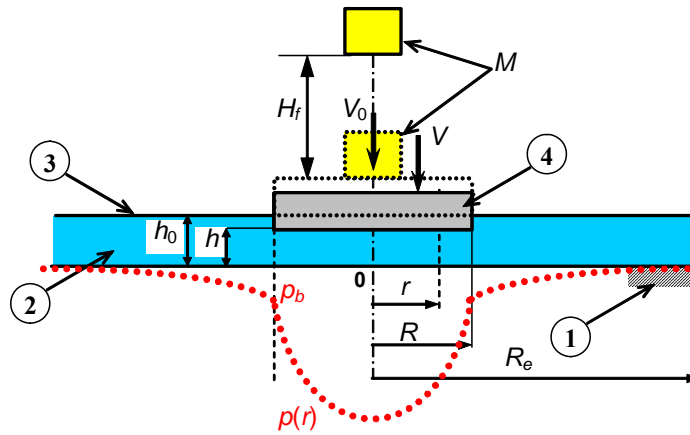


Fig. 1. Geometria configurației circulare încărcată prin impact

În modelarea analitică a procesului se va considera că stratul poros 2 este solidar cu stratul rigid 1 și este ecranat/izolat de mediul exterior cu o peliculă foarte subțire 3, care împiedică curgerea pe direcția grosimii stratului. Pentru lărgirea aplicațiilor posibile, se vor considera următoarele condiții la limită de presiuni:

1. La limita suprafeței de contact, numită zona „interioară”, dintre placa circulară 4 și stratul poros ecranat, se va considera o presiune oarecare p_b , ce urmează a fi dedusă, deci:

$$r = R; \quad p = p_b \tag{3}$$

2. La limita suprafeței de contact, numită zona „exterioară”, dintre stratul poros și mediul R_e , se va considera că presiunea atinge valoarea celei atmosferice

$$r = R_e; \quad p = 0 \tag{4}$$

Rezolvarea problemei propuse presupune soluționarea a trei etape distincte:

- a) Determinarea distribuției de presiuni, p , respectiv a forței de expulzare, F , pentru o viteză normală cunoscută, V ;
- b) Determinarea variației grosimii stratului comprimat în funcție de timp $h(t)$, pentru o forță de expulzare cunoscută, F ;
- c) Determinarea variației forței de contact F_s , în funcție de grosimea momentană a stratului $h(t)$, pentru un impuls MV_0 dat.

pentru zona „interioară”
$$\bar{p} = \frac{\sigma_0^2}{2H} \left[\frac{(H - \sigma_0)}{(1 - \sigma_0)^3} \ln \bar{R} + \frac{1 - \bar{r}^2}{2(H - \sigma_0)^2} \right] \tag{3}$$

pentru zona „exterioară”
$$\bar{p} = \frac{\sigma_0^2 (H - \sigma_0)}{2H(1 - \sigma_0)^2} \ln \frac{\bar{R}}{\bar{r}} \tag{4}$$

Prin integrarea presiunii pe suprafața discului se obține forța portantă după care prin integrarea ecuației diferențiale se obține timpul de coborâre corespunzător unei forțe date. Rezultatele sunt prezentate în Tab. 1.

1.2. Cazul contactelor de configurație circulară cu condiții la limită restrânse

În cazul particular în care la frontiera contactului ($r = R$) presiunea este nulă, ($p_b = 0$) prin trecere la limită ($R = R_e$) se obțin formulele de calcul simplificate [10], sintetizate în Tab. 1.

1.3. Rezultate numerice și discuții

În Fig. 2 este prezentată variația forței generată prin impact (forța de reacție a filmului expulzat), în formă adimensională, în funcție de grosimea adimensională a filmului ($H = h / h_0$) pentru cele două variante de condiții la limită. **Se observă existența unui optim al amortizării, definit prin cea mai mică valoare a forței maxime generată prin expulzarea sub impact.**

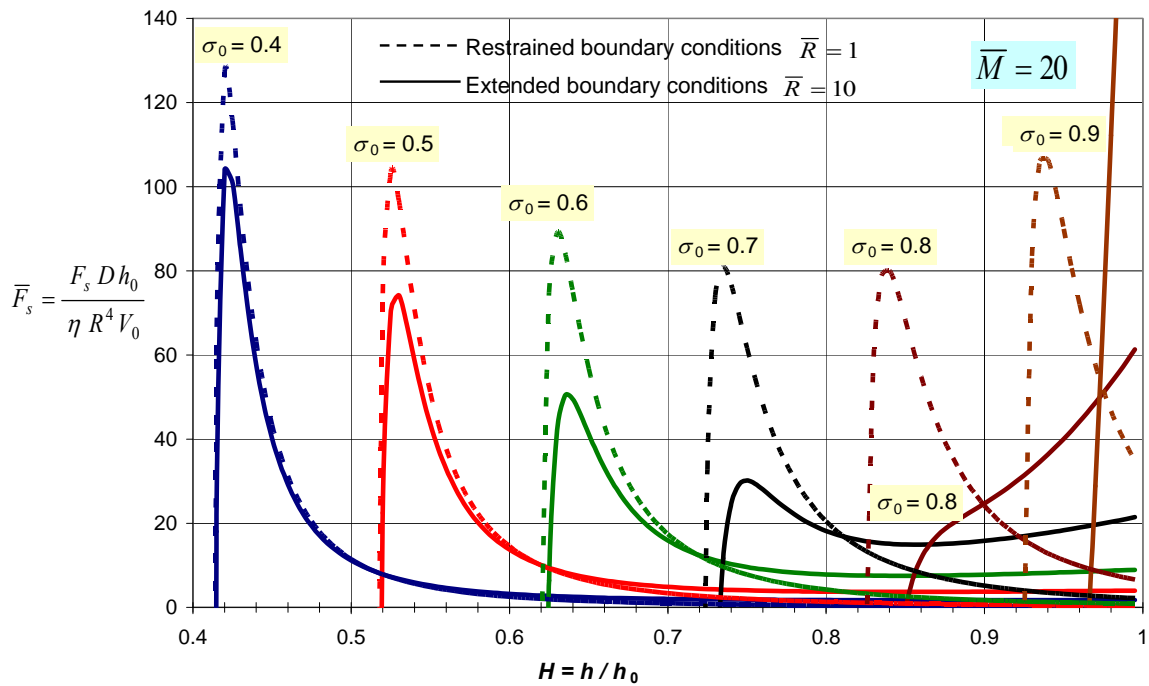


Fig. 2. Variația forței de expulzare prin șoc pentru o configurație circulară în cele două variante de condiții la limită

1.4. Procesul de expulzare prin impact în straturi poroase foarte compresibile, pentru contacte de configurație pătrată.

Ca și în cazul configurației circulare, esența soluției o constituie rezolvarea ecuației de curgere prin dislocarea cu o piesă de formă pătrată (de latură, a):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi h \frac{dp}{dx} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi h \frac{dp}{dz} \right) = \eta V \varepsilon \tag{5}$$

care, prin adimensionalizare și normalizare ($\bar{p} = \bar{p} \frac{H(H - \sigma_0)^2}{\sigma_0^2}$), conduce la o ecuație de tip Poisson:

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial z^2} = 1 \tag{6}$$

Soluția acestei ecuații de tip Poisson, pentru condiții la limită nule pe contur ($\bar{p} = 0$ la $\bar{x} = \pm 1/2$ și $\bar{z} = \pm 1/2$), se poate scrie sub forma unei serii infinite :

$$\bar{p} = \frac{1 - 4(\bar{x} - 0.5)^2}{8} - \frac{4}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin[(2k-1)\pi \bar{x}]}{(2k-1)^3 \sinh[(2k-1)\pi]} [\sinh[(2k-1)\pi \bar{z}] + \sinh[(2k-1)\pi(1 - \bar{z})]] \right\} \tag{7}$$

Pe baza acestei formule se pot rezolva cele trei tipuri de probleme de expulzare enunțate la începutul Capitolului. Astfel, avem succesiv rezultatele:

$$\bar{F} = \frac{1}{12} + \frac{16}{\pi^5} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tanh(\frac{\pi}{2} - k\pi)}{(2k-1)^5} = 0.0351 \tag{8}$$

unde forța portantă normalizată este $F = \frac{DV_0}{\eta a^4} \cdot \frac{H(H - \sigma_0)^2}{\sigma_0^2}$

În Fig. 2 este prezentată o comparație între valorile forței la șoc pentru cerc și pătratul având aceeași arie. Se remarcă forțe mai reduse pentru cerc pentru $\sigma_0 < 0.7$, după care situația de inversează.

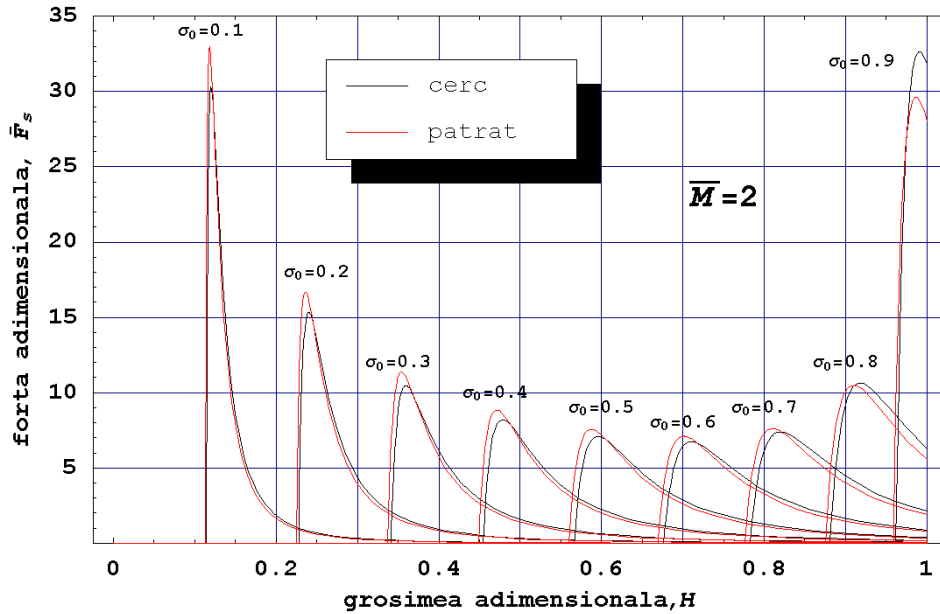


Fig. 3. Comparație cerc-pătrat pentru forța de expulzare prin șoc

2. CALCULUL CU DIFERENȚE FINITE A PROCESULUI DE EXPULZARE ÎN MEDII POROASE, FOARTE COMPRESIBILE.

În Capitolul precedent s-a prezentat un model analitic de calcul al procesului de expulzare a unui fluid înglobat într-o matrice poroasă, deformată elastic cu o suprafață rigidă de formă pătrată. Pentru a ajunge la o soluție analitică, s-au impus o serie de ipoteze limitative (suprafețe paralele de formă pătrată, rezistența elastică a matricei solide neglijabilă, etc.) care, pentru a fi eliminate, necesită o abordare numerică. În acest Capitol sunt prezentate bazele modelului numeric de calcul a procesului de expulzare în medii poroase, foarte compresibile. Programele de calcul corespunzătoare dezvoltate în această etapă, deși au un caracter mult mai general, sunt aplicate pentru aceeași configurație tratată analitic în Capitolul precedent (suprafețe paralele de configurație pătrată) fiind astfel posibilă pe de o parte validarea algoritmilor folosiți iar pe de altă parte evaluarea preciziei schemelor cu diferențe finite.

2.1 Schematizarea cu diferențe finite. Abordare generală.

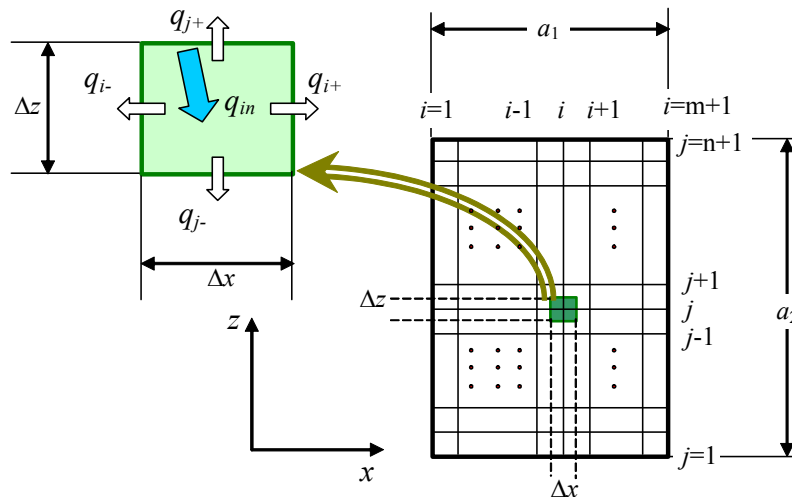


Fig. 4. Schematizarea modelului cu diferențe finite

Pentru rezolvarea problemei s-a utilizat metoda volumului de control, definit în jurul fiecărui nod (i, j) , pe o rețea cu pas constant pe ambele direcții (Fig. 4). Ecuația de conservare a debitului, scrisă pentru un volum de control oarecare din interiorul rețelei este:

$$q_{j+} + q_{j-} + q_{i+} + q_{i-} = q_{in} \tag{9}$$

unde membrul drept, este dat de debitul de fluid dislocate prin mișcarea de apropiere a suprafețelor:

$$q_{in} = \Delta x \cdot \Delta z \cdot V \cdot (1 - \sigma) \tag{10}$$

Folosind diferențe finite centrate, de ordinul I, după mai multe calcule algebrice simple se obține ecuația presiunii într-un nod oarecare (i, j) :

$$p_{i,j} = \frac{\Delta x \cdot \Delta z \cdot V \cdot (1 - \sigma) + \frac{\phi \cdot h}{\eta} \cdot \left(\frac{\Delta z \cdot p_{i+1,j}}{\Delta x} + \frac{\Delta z \cdot p_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{\Delta x \cdot p_{i,j+1}}{\Delta z} + \frac{\Delta x \cdot p_{i,j-1}}{\Delta z} \right)}{2 \cdot \frac{\phi \cdot h}{\eta} \left(\frac{\Delta x}{\Delta z} + \frac{\Delta z}{\Delta x} \right)} \tag{11}$$

Pentru rezolvarea acestui sistem de ecuații care conduce la aflarea distribuției de presiuni, $p_{i,j}$, s-a utilizat metoda iterativa Gauss-Seidel, fără relaxare. Inițializarea se face cu presiune nulă. Apoi, la fiecare pas de calcul ulterior, se folosește ca set de valori inițiale distribuția calculată la pasul precedent. Criteriul de convergență este impus asupra diferenței relative a presiunilor medii (forța unitară) obținute în 2 iterații succesive:

$$\left| \frac{p_m^{(k)} - p_m^{(k-1)}}{p_m^{(k)}} \right| < Tol \tag{12}$$

unde toleranța folosită a fost de $Tol = 10^{-6}$ iar presiunea medie se calculează simplu, având în vedere cazul particular al condițiilor la limită nule pe graniță:

$$p_m = \frac{1}{n \cdot m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{i,j} \tag{13}$$

Pentru rezolvarea numerică a problemei enunțate s-a elaborat un program de calcul în limbaj Turbo-Pascal. Au fost realizate 3 variante ale programului de calcul, fiecare corespunzând uneia dintre cele 3 probleme tratate și analitic.

Având în vedere simetria totală a modelului (condiții la limită nule pe contur), s-a dezvoltat și o variantă simplificată de schemă cu diferențe finite, în care domeniul de integrare este doar un sfert din dreptunghiul (pătratul) inițial. Distribuția presiunii pentru cazul unei plăci pătrate ($a = 100\text{mm}$) apăsată cu o forță constantă $F=10\text{N}$, pentru care se cunosc $\sigma_0 = 0.3$, $\eta=0.01$, $h_0=3\text{mm}$ este prezentată în Fig. 5.

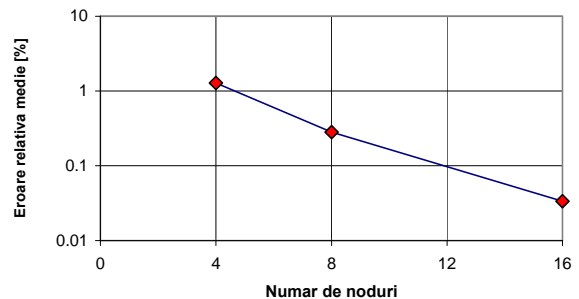
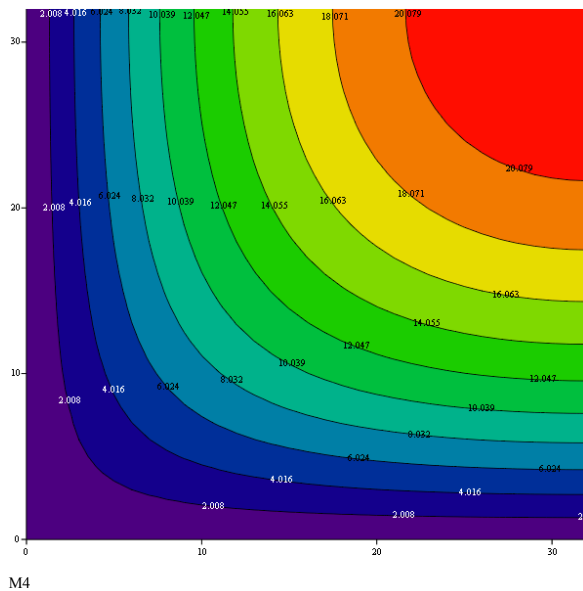


Fig. 6. Eroarea relativă totală mediată pentru diferite discretizări

Fig. 5. Distribuția presiunii [MPa] pentru cazul $\sigma_0 = 0.3$, $\eta=0.01$, $F=10\text{N}$, $h_0=3\text{mm}$

Pentru a defini discretizarea optimă, s-a efectuat o analiză a preciziei schemei cu diferențe finite folosind metoda dublării rețelei. Evaluarea s-a realizat prin media erorilor relative ale nodurilor de referință, erori raportate la valorile calculate cu rețeaua de cea mai mare finețe, (cu 32 de intervale). Pentru a avea o imagine sintetică asupra modului de variație al preciziei cu densitatea discretizării, în Fig. 6 este prezentată eroarea relativă medie globală. Având în vedere valoarea erorilor, s-a decis continuarea aplicațiilor numerice pe discretizarea cu 16 noduri (respectiv 32 noduri/latura).

3 RAPORT DE ANALIZA A APLICABILITĂȚII PROGRAMULUI FLUENT PENTRU STUDIUL CURGERII PRIN MEDII POROASE DEFORMABILE.

3.1. Modelarea mediilor poroase în programul FLUENT – generalități

O primă acțiune de evaluare a programului FLUENT s-a concentrat asupra modelelor de curgere prin medii poroase implementate și în special a posibilității de definire a neomogenității (variația porozității în timp și spațiu). Raportul descrie aceste modele precum și aplicabilitatea lor. Se reține ca o concluzie importantă faptul că modelul de Ergün aplicat pentru curgere laminară conduce la ec. Blake-Kozeny:

$$\frac{|\Delta p|}{L} = \frac{150 \mu}{D^2} \frac{(1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon^3} V_\infty$$

astfel că permeabilitatea se poate exprima cu relația clasică Kozeny-Carman –ec. (1), în care $k \approx 9.37$:

$$\phi = \frac{D^2}{150} \frac{\varepsilon^3}{(1 - \varepsilon)^2}$$

3.2. Comparație analitic – numeric a modelului de curgere Poisseuille pentru suprafețe plane înclinate de lățime infinită, printr-un mediu poros.

Pentru evaluarea modelelor de curgere prin medii poroase pe care le oferă programul Fluent, s-a analizat o configurație geometrică simplă, pentru care a fost posibilă dezvoltarea unei soluții analitice de referință. S-a considerat o configurație tip patină înclinată (*interstițiu convergent*), de lățime infinită (*curgere plană*) fără mișcare relativă, în care curgerea prin mediul poros care umple interstițiul este generată de o diferență de presiune (*curgere de tip Poisseuille*) – Fig. 7.

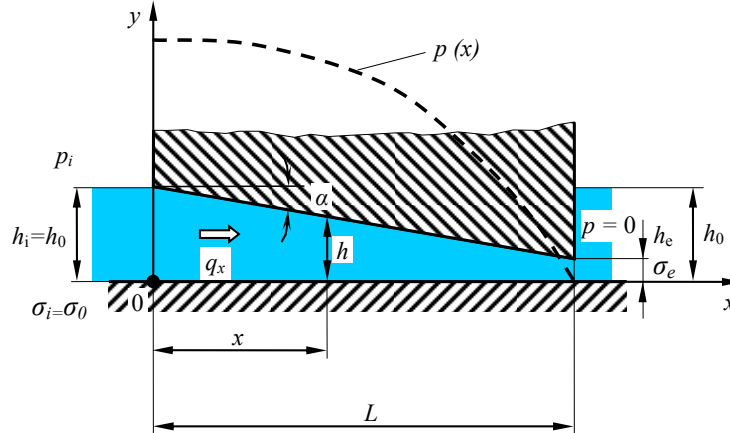


Fig. 7. Geometria interstițiului cu suprafețe plane înclinate

Prin mijloace analitice clasice în Lubrificație [9] se obține variația presiunii în direcția de curgere:

$$\bar{p} = \frac{(1 - \sigma_0)^2}{[(1 - \sigma_0)^2 - (H - \sigma_0)^2]} \left[1 - \left(\frac{H - \sigma_0}{(1 - (1 - H)\bar{x}) - \sigma_0} \right)^2 \right] \text{ cu } \bar{p} \in (0,1) \text{ și } \bar{x} \in (0,1)$$

unde: $\bar{p} = p / p_0$, și $\bar{x} = x / L$.

În Fig. 8 putem remarca evoluția presiunii adimensionalizate în funcție de coordonata axială adimensionalizată. Sunt analizate trei configurații geometrice, cu raportul grosimilor: $H = 0.3$, $H = 0.5$, $H = 0.9$. Se observă foarte bună coincidență între predicțiile analitice și rezultatele numerice.

Diferențele dintre cele două rezultate au două surse. Pe de o parte diferența de modelare, prin faptul că modelul analitic presupune presiunea constantă pe grosimea filmului, ceea ce nu e perfect adevărat în modelul FLUENT bazat pe rezolvarea ecuațiilor Navier Stokes complete.

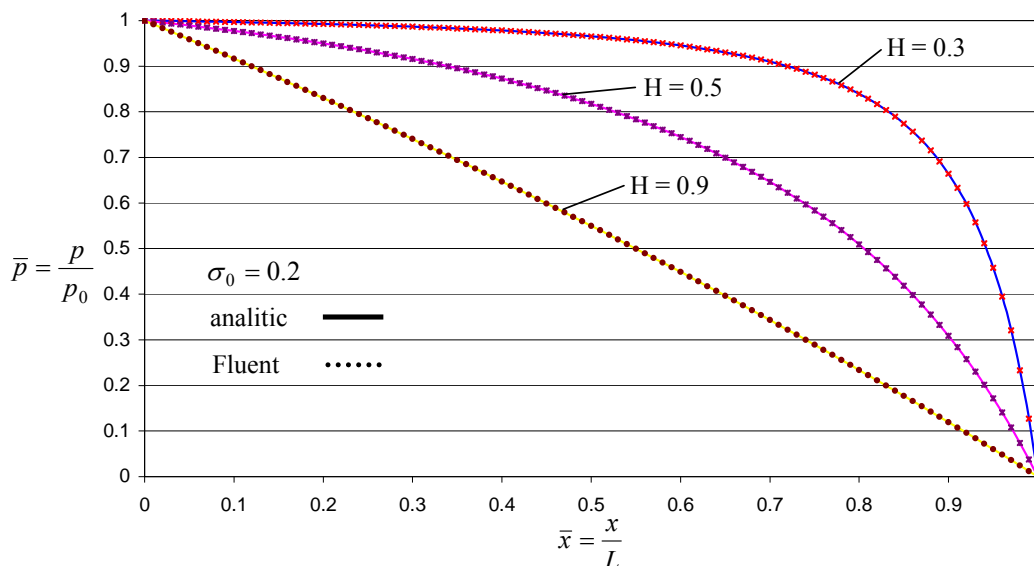


Fig. 8. Variația presiunii la curgerea de tip Poiseuille printr-un mediu poros deformabil

4 CONCLUZII GENERALE.

În prezentul Raport sunt prezentate soluțiile analitice și numerice, pentru analizarea procesului de lubrificație XPHD, în trei variante de abordare: *expulzare cu viteză constantă*, *expulzare produsă cu forță de apăsare constantă*, respectiv *expulzarea produsă prin impact*. Studiile au fost realizate pe două configurații geometrice de interes: **configurație circulară**, respectiv **pătrată** (care poate fi generalizată la forma dreptunghiulară), ambele aliniată (suprafețe paralele)

Pe baza modelului analitic s-au efectuat analize parametrice care au pus în evidență **existența și localizarea unei permeabilități optime pentru minimizarea forței maxime de expulzare**, caracteristică esențială pentru amortizarea șocurilor. În același timp s-a evidențiat **efectul foarte important de reducere a forței maxime de expulzare în cazul condițiilor la limită extinse**.

Soluțiile analitice au fost utilizate pentru evaluarea și calibrarea programelor de calcul numeric, cu diferențe finite, care vor fi folosite în continuare în modelarea unor configurații mai complexe, în condiții mai realiste, care nu mai admit soluții analitice. S-a analizat precizia schemelor cu diferențe finite, pentru rezolvarea optimă a compromisului timp de calcul – precizie.

Algoritmii propuși pot fi folosiți fără modificări de esență în abordarea unor probleme de squeeze la configurații mai complexe precum cazul suprafețelor rectangulare neparalele sau a suprafețelor cilindrice interioare (specifice cuzineților lagărelor radiale).

În paralel, a fost analizată posibilitatea utilizării unui software comercial (FLUENT) pentru modelarea problemelor de lubrificație prin medii poroase, cu porozitatea variabilă. Rezultatele obținute sunt promițătoare dar nu sunt pe deplin edificatoare, având în vedere implementarea restrictivă a legilor constitutive ale mediilor poroase. Se întrevide o soluție prin scrierea de subrutine în cadrul FLUENT, soluție relativ complicată și care necesită resurse de timp extrem de mari.

4 BIBLIOGRAFIE.

- [1.] Pascovici, M.D., 1994, *Procedure and device for pumping by fluid dislocation*, Romanian Patent, 109469 (in Romanian).

- [2.] Feng, J., Weinbaum, S., 2000, *Lubrication theory in highly compressible porous media: the mechanics of skiing, from red cells to humans*, J. Fluid Mech., 422, 281-317.
- [3.] Pascovici, M.D., 2001, *Lubrication by Dislocation: A New Mechanism for Load Carrying Capacity*. In: Proceedings of 2nd World Tribology Congress, Vienna, p.482 (Paper on CD)
- [4.] Wu, Q., Andreadopoulos, Y. and Weinbaum, S., 2004, *From Red Cells to Snowboarding: A New Concept for a Train Track*, Phys., Review Letters, 93, 19, 194501-1, 194501-4.
- [5.] Han, Y., Weinbaum, S., Spaan, J.A.E., Vink, H., 2006, *Large deformation analysis of the elastic recoil of fiber layers in a Brinkman medium with application to the endothelial glycocalyx*, J. Fluid Mech., 554, 217-235.
- [6.] Pascovici, M.D., 2007, *Lubrication of red blood cells in narrow capillaries. A heuristic approach*, 2nd Vienna Int. Conf. on Micro and Nano technology, pp. 95-100.
- [7.] Scheidegger, A.E., 1974, *The physics of flow through porous media*, Third edition, University of Toronto Press.
- [8.] Ghaddar, C.K., 1995, *On the Permeability of Unidirectional Fibrous Media. A Parallel Computational Approach*, Phys. Fluids, 7, 11, 2563-2586.
- [9.] Pinkus, O. și Sternlicht, B. - *Theory of hydrodynamic lubrication*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1961.
- [10.] Pascovici, M.D., Cicone, T., 2003, *Squeeze-film of unconformal compliant and layered contacts*, Tribology International 36, 791-799.
- [11.] McCutchen, C.W., 1962, *The frictional properties of animal joints*, Wear, 5, 1-17.

NOTAȚII

a – latura pătratului;
 b – dimensiune a dreptunghiului;
 D – grup dimensional în ecuația Kozeny-Carman ;
 d – dimensiunea caracteristică a materialului poros (diametrul firelor din care este constituit stratul poros deformabil);
 F – forța portantă;
 \bar{F} – forța portantă adimensională
 $(\bar{F} = \frac{D h_0}{\eta V_0 R^4} F \text{ configurație circulară } \bar{F} = \frac{D h_0}{\eta V_0 a^4} F \text{ configurație pătrată})$
 H – raportul grosimilor filmului;
 h – grosimea stratului poros/filmului;
 H_f – înălțimea de cădere
 k – constantă adimensională în ecuația Kozeny-Carman
 M – masa de impact
 \bar{M} – impact adimensional
 $(\bar{M} = \frac{D}{\eta R^4} M V_0 \text{ configurație circulară } \bar{M} = \frac{D}{\eta a^4} M V_0 \text{ configurație pătrată})$
 P_f – puterea consumată prin frecare;
 p – presiune;
 \bar{p} – presiune adimensională;
 Q – debit;

q – debit unitar (elementar);
 R – rază (raza discului);
 R_e – raza exterioară a domeniului;
 \bar{R} – raportul razelor domeniilor, R_e/R ;
 r – coordonată radială;
 \bar{r} – coordonată radială adimensională;
 t – timp
 u – viteza fluidului
 V – viteză normală (de apropiere/expulzare);
 x, y, z – coordonate axiale;
 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ – coordonate axiale adimensionale;
 ε – porozitate;
 ϕ – permeabilitate;
 η – viscozitate;
 σ – compactitate, $\sigma = 1 - \varepsilon$
 τ – timp adimensional, $(\tau = \frac{FD}{\eta V_0 R^4} t \text{ configurație circulară } \tau = \frac{FD}{\eta V_0 a^4} t \text{ configurație pătrată})$;

INDICI

s – corespunzător încărcării prin șoc
 0 – initial (strat nedeformat)
Notatii specifice modelelor numerice
 i, j – variabilele rețelei de integrare
 $n \times m$ – numărul de noduri din rețea
 $\Delta x, \Delta z$ – dimensiunea caracteristică a rețelei